वैदिक गणित

शिक्षकों हेतु मार्गदर्शिका

प्रारम्भिक स्तर

केनिथ आर. विलियम्स

प्रोत्साहानात्मक पुस्तकें

वैदिक गणित
शिक्षकों हेतु मार्गदर्शिका
प्रारम्भिक स्तर

मूल – लेखक

केनिथ आर. विलियम्स

अनुवादक

इंजीनियर कृष्णकांत दवे,
इंदौर, (म.प्र.) भारत

प्रोत्साहानात्मक पुस्तकें

Published by Inspiration Books, 2009,
Kensglen, Nr Carsphairn, Castle Douglas, DG7 3TE, Scotland, U.K.

ISBN 978-1-902517-16-2

First published in 2002 by Inspiration Books.
Revised edition 2009.

प्रेरणादायक पुस्तकों द्वारा प्रकाशित – 2009

केन्सग्लेन, कारस्फैन के पास, केसल डगलस, डी.जी. 7 3 टीई, स्काटलेंड, यू. के.

ISBN 978-1-902517-16-2

प्रथम 2002 में प्रेरणादायक पुस्तकों द्वारा प्रकाशित।
नवीन संस्करण 2009

अंग्रेजी से हिन्दी अनुवादक के कार्य से जुड़े व्यक्तिः

अनुवादकः कृष्ण कांत दवे, इंदौर (म.प्र.), भारत

प्रुफ रिडरः रामकृष्ण काबरा, इंदौर (म.प्र.), भारत

प्रुफ रिडरः प्रकाश दुबे, रतलाम (म.प्र.), भारत

टाईपिस्टः राकेश सैनी, पिलानी (राज.), भारत

भूमिका

युवकों को वैदिक प्रणाली सीखने व सिखाने के लिए एक पुस्तिका तैयार की गई है, जो इसके साथ गणित के बुनियादी पहलुओं को समझाती है। यह तीन पुस्तिकाओं (प्रारंभिक, मध्यवर्ती एवं उन्नत) में से एक है। इसलिए शिक्षक इसे वैदिक गणित सीखने व सिखाने के लिये उपयोग कर सकते हैं यद्यपि यह विद्यार्थीयों के पाठ्यक्रम के लिये उपयोगी नहीं है, (इसके लिए कॉस्मिक केलक्युेलेटर पाठ्यक्रम की सिफारिश की जाती है) इसे वैदिक गणित के पाठ्यक्रम पढ़ाने के लिये भी उपयोग किया जा सकता है। यह पुस्तिका 3 से 7 कक्षा के बच्चों के शिक्षक के लिए उपयुक्त है।

इस पाठ्यक्रम के 16 अध्याय, लेखक द्वारा 1990 और 1995 के बीच ऑक्सफोर्ड विश्वविद्यालय में Swedish mathematics teachers को दिये गए एक सप्ताह के ग्रीष्मकालीन पाठ्यक्रम की श्रृंखला पर आधारित है। उपरोक्त पाठ्यक्रम 18.5 घंटे के काफी गहन सबक से तैयार किए गए थे।

इसमें वैदिक प्रणाली की सभी तकनीक पूर्ण रूप से समझायी गयी है और जहां जरूरी है, सबूत दिये गये हैं। प्रासंगिक सूत्र सभी जगह निर्दिष्ट हैं (ये सूत्र मार्गदर्शिका के अन्त में सूचीबद्व हैं) और सुविधा के लिए प्रत्येक अभ्यास के साथ भी दिये हैं। यह बताने के लिए परस्पर सन्दर्भ भी दिए गए हैं कि कौनसे वैकल्पिक विषय को किस एक बिन्दू से आगे बढ़ाया जा सकता है।

वैदिक गणित में मानसिक दृष्टिकोण को महत्व दिया जाता है इसलिए जब तक विद्यार्थी को सुविधाजनक लगे, हम इन्हें मानसिक तौर पर कार्य करने के लिए प्रोत्साहित करते हैं। कॉस्मिक केल्कुलेटर पाठ्यक्रम में अधिकतर या सभी पाठों के शुरू में विद्यार्थी का संक्षिप्त मानसिक परीक्षण लिया जाता है, जो कि पाठ की अच्छी शुरूआत करता है और पिछले कार्य की पुनरावृत्ति भी, जिससे चालू पाठ हेतु आवश्यक कुछ विचारों का परिचय होता है। कॉस्मिक केल्कुलेटर पाठ्यक्रम में बहुत से खेल भी हैं जो वैदिक प्रणाली की स्थापना और उसके उपयोग में विश्वास को बढ़ावा देने में मदद करते हैं।

कुछ विषय इस पुस्तक में छोड़ दिए गये हैं। उदाहरण के लिए यहाँ क्षेत्रफल के लिए कोई भाग नहीं है सिर्फ थोड़ा सा जिक्र किया गया है क्योंकि यह आधुनिक पाठ्यक्रम के समान ही है इसलिए प्रासंगिक सूत्र दिए गये हैं।

विषय सूची

भूमिका		iii
अध्याय 1 – सम्पूर्ण करना		**1**
1.1	**प्रस्तावना**	1
1.2	**दस बिन्दु वृत्त**	3
1.3	**दस के गुणक**	4
1.4	**दस से कमी**	5
	कमी और पूर्ण करना एक साथ	5
1.5	**मानसिक जोड़**	6
	सम्पूर्ण करना	7
	अंकों के स्तम्भ	9
1.6	**जोड़ने से और घटाने से**	11
	आधार के पास की संख्याओं को घटाना	12
अध्याय 2 – दोगुना व आधा		14
2.1	**दोगुना करना** 14	
	4, 8 से गुणा करना	16
2.2	**आधा करना**	17
	संख्याओं को अलग–अलग करना	18
	4,8 से भाग देना	18
2.3	**पहाड़ों को आगे बढ़ाना**	19
2.4	**5,50,25 से गुणा करना**	20
2.5	**5,50,25 से भाग देना**	21
	5 से भाग देना	21
	50, 25 से भाग देना	22
अध्याय 3 – अंक जोड़		24
3.1	**अंकों को जोड़ना**	**24**
3.2	**नौ बिन्दु वृत्त**	**26**
3.3	**नौ के अंक को बाहर निकालना**	**26**
3.4	**अंक जोड़ की और पहेली**	**29**
3.5	**अंक जोड़ से जांचना**	**31**
	गुणनफल की जांच	**33**
3.6	**वैदिक वर्ग**	**34**
3.7	**वैदिक वर्ग से स्वरूप**	**36**
3.8	**नौ अंक**	**37**
अध्याय 4 – बायें से दायें		**39**
4.1	**जोड़ना : बायें से दायें**	**40**
4.2	**गुणा करना : बायें से दायें**	**42**
4.3	**दोगुना और आधा करना**	**43**
4.4	**घटाना : बायें से दायें**	**44**
4.5	**घटाने के प्रश्नों को जांचना**	**45**
4.6	**घटाने के और सवाल**	**46**
अध्याय 5 – सभी 9 से और अंतिम 10 से		
5.1	**सूत्र का उपयोग**	**48**
5.2	**घटाना**	**49**
	शून्य लगाना	50
	एक कम	51
	एक अधिक	51
	फिर एक कम	52
5.3	**मुद्रा**	53
अध्याय 6 – संख्या विभाजन		
6.1	**जोड़**	**54**
6.2	**घटाना**	**55**
6.3	**गुणा करना**	**56**
6.4	**भाग देना**	57
अध्याय 7 – आधार गुणन		**59**
7.1	**पहाड़े** (Times Tables)	**59**
7.2	**संख्यायें दस से थोड़ी ऊपर**	**61**
7.3	**गुणन तालिका का स्वरूप**	62
	आवृत्ति दशमलव	64
7.4	**100 के पास की संख्याऐं**	65
	मानसिक स्तर पर	67
	संख्या 100 से ऊपर	68
	मानसिक गणित	69
	रशियन पीजेन्ट गुणक	69
7.5	**बड़ी संख्याऐं**	70
	संख्याऐं आधार से ऊपर	71
7.6	**अनुपात से**	71
	अनुपात का दूसरा उपयोग	73
7.7	**दूसरे आधार के निकट की संख्याओं का गुणा करना**	**74**
7.8	**आधार के पास की संख्या का वर्ग निकालना**	75
7.9	**सारांश**	**77**
अध्याय 8 – जाँच करना और विभाजनियता		78
8.1	**विभाजन के लिए अंक जोड़ जाँच**	**78**

8.2	**पहले से पहला और अंतिम से अंतिम**	**79**
	पहले से पहला	79
	अंतिम से अंतिम	81
8.3	**4 से विभाजनियता**	**81**
8.4	**11 से विभाजनियता**	82
	11 से विभाजन के बाद शेष	83
	दूसरी अंक जोड़ जाँच	84
अध्याय 9 – शिरोरेखा संख्या		**85**
9.1	**शिरोरेखा संख्या को हटाना**	**85**
	सभी 9 से और अंतिम 10 से	87
9.2	**घटाना**	**88**
9.3	**संख्याओं को शिरोरेखा संख्या बनाना**	**89**
9.4	**शिरोरेखा संख्याओं का उपयोग**	**91**
अध्याय 10 – विशेष गुणन		**92**
10.1	**11 से गुणा करना**	92
	हांसिल	94
	बड़ी संख्यायें	94
10.2	**पहले से एक अधिक**	**96**
10.3	**9 से गुणा करना**	**97**
10.4	**पहले से पहला और अंतिम से अंतिम**	**98**
10.5	**औसत का उपयोग करना**	**99**
10.6	**विशेष संख्यायें**	**101**
	पुनरावृत्ति संख्यायें	**101**
	अनुपात से	**102**
	छद्म–क्रिया	**102**
अध्याय 11 – सामान्य गुणा करना		**105**
11.1	**पुनरीक्षण**	**105**
11.2	**दो अंक संख्यायें**	**106**
	हांसिल	**107**
11.3	**गुणक को खिसकाकर**	**109**
11.4	**विस्तार**	**111**
11.5	**द्विपद का गुणा करना**	**112**
11.6	**3 अंकों की संख्याओं का गुणा करना**	**114**
11.7	**लिखित गणना**	**116**
अध्याय 12 – वर्ग निकालना		**119**
12.1	**ऐसी संख्या जिनके के अंत में 5 है**	**119**
12.2	**50 के पास की संख्याओं का वर्ग निकालना**	**120**
12.3	**सामान्य वर्ग निकालना**	**121**
	डुप्लेक्स	**121**
12.4	**संख्या विभाजन**	**123**
12.5	**बीजगणितीय वर्ग निकालना**	**124**
12.6	**वर्ग का अंक जोड़**	**125**
12.7	**पूर्ण वर्ग का वर्गमूल**	**126**
12.8	**3 और 4 अंकों की संख्या**	**128**
अध्याय 13 – समीकरण		**130**
13.1	**एक–चरण समीकरण** (Step)	**130**
13.2	**दो–चरण समीकरण** (Step)	**131**
13.3	**तीन–चरण समीकरण** (Step)	**132**
अध्याय 14 – भिन्न		
14.1	**सीधे (खड़े) और तिरछे दोनों प्रकार से**	**134**
14.2	**एक सरलीकरण**	**136**
14.3	**भिन्न की तुलना**	**137**
14.4	**कार्य का एकीकरण**	**138**
अध्याय 15 – विशेष विभाजन		**139**
15.1	**9 से भाग देना**	**139**
	बड़ी संख्याऐं	141
	हांसिल	142
	छोटा तरीका	142
15.2	**8 से भाग देना**	**143**
15.3	**99, 98 से भाग देना**	**145**
15.4	**भाजक आधार से कम**	**146**
	दो अंक के उत्तर	**148**
15.5	**भाजक आधार संख्या के उपर**	**150**
अध्याय 16 – मुकुट मणि		**152**
16.1	**ध्वज** (Flag) **में एक अंक**	**152**
16.2	**विभाजन को छोटा करना**	**153**
16.3	**बड़ी संख्यायें**	**155**
16.4	**ऋणात्मक ध्वजांक**	**157**
	उलट गुणन	
16.5	**शेष को दशमलव में करना**	**159**
सूत्र और उप–सूत्र		**160**
नौ बिन्दु वृत्त		**162**
संदर्भ		**163**
वैदिक सूत्रों की अनुक्रमणिका		**164**
अनुक्रमणिका		**166**

अध्याय 1

सम्पूर्ण करना

(COMPLETING THE WHOLE)

सारांश

1.1 **प्रस्तावना** – वैदिक गणित का इतिहास

1.2 **दस बिन्दू वृत्त** – संख्याओं को वृत्त पर दर्शाना

1.3 **दस के गुणक**

1.4 **दस से न्यूनता (कमी)–** 10 के गुणक की संख्या से सम्बन्ध

1.5 **मानसिक स्तर पर जोड़**

1.6 **जोड़ कर व घटाकर**– दस के गुणक के पास की संख्याऐं

1.1 प्रस्तावना

वैदिक गणित प्राचीन पद्धति का गणित है जिसे पिछली सदी के शुरू में **श्री भारती कृष्ण तीर्थजी** ने फिर से खोजा था (आगे इन्हें भारती कृष्ण के नाम से सम्बोधित किया है)।

संस्कृत शब्द ''वेद'' का मतलब ''ज्ञान'' है। वेद हमारे प्राचीन लिखित कृति हैं जिनकी तिथि विवादास्पद है लेकिन यह ईसा से पहले कई सौ वर्ष पहले की कोई तिथि है। भारतीय परम्परा के अनुसार वेदों में निहित ज्ञान लेखन आविष्कार के बहुत पहले से मालूम था और बेरोकटोक सभी को उपलब्ध था। इसका प्रचार एक से दूसरे तक मौखिक रूप से हुआ। जिसे वेद कहा जाता है उस में बहुत से दस्तावेज हैं (कहा जाता है कि लाखों दस्तावेज भारत में हैं इसमें से कई का अनुवाद भी नहीं हुआ है) और अभी–अभी उन्हें दोनों स्वयं के भीतर और एक–दूसरे के सम्बन्ध में बहुत ही सरंचित बताया गया है (देखें संदर्भ 2) वेदों के अन्तर्गत आने वाले विषय, व्याकरण, धर्नुवेद, खगोल, स्थापत्य, मनोविज्ञान, दर्शनशास्त्र आदि हैं।

सौ वर्ष पूर्व जब संस्कृत के विद्वान वैदिक दस्तावेजों का अनुवाद कर रहे थे तब वे उनमें ज्ञान की गहराई व वृहदता को देखकर अचंभित हो गये। लेकिन कुछ दस्तावेज जिन पर ''गणितसूत्र'' (यानि गणित) अंकित था, जिसका मतलब गणित है, का गणित के रूप में मतलब नहीं निकाल सके। उदाहरण के लिए एक ने कहा ''राजा कामसे के शासनकाल में अकाल, महामारी, गन्दगी, जैसी परिस्थितियां विद्यमान थी'' उन्होंने कहा कि यह गणित नहीं बकवास है।
श्री भारती कृष्ण का जन्म 1884 में हुआ और स्वर्गवास 1960 में। वे एक प्रतिभाशाली छात्र थे उन्होंने सभी विषय संस्कृत, अंग्रेजी, गणित, इतिहास, विज्ञान, दर्शन शास्त्र आदि का अध्ययन किया व सभी में उच्चतम अंक प्राप्त किए। जब उन्होंने सुना कि यूरोपियन विद्वान का यह मानना था कि वेदों के कुछ भागों में गणित भी है, तो उन्होंने इस बाबत वेदों का अध्ययन करने का निश्चय किया और उनका मतलब निकाला। 1911 और 1918 के मध्य में पुरातन गणित प्रणाली का पुनः निर्माण कर सके, जिसे हम अब वैदिक गणित कहते हैं।

उन्होंने इस प्रणाली की व्याख्या करते हुए 16 किताबें लिखी, किन्तु दुर्भाग्य से ये गुम हो गई और जब श्री भारती कृष्ण को 1958 में इसका पता चला तो उन्होंने परिचयात्मक किताब ''वैदिक गणित'' के नाम से लिखी। यह वर्तमान में उपलब्ध है व लोकप्रिय है (देखें संदर्भ 1)

लेखक 1971 में इस वैदिक गणित की किताब के सम्पर्क में आया और तभी से पुस्तक की सामग्री का विकास कर उन क्षेत्रों में भी लागू कर रहा है जिन्हें भारती कृष्ण ने छोड़ दिया था। इस प्रकार इस किताब में कोई भी नई चीज जो वैदिक गणित में नहीं है लेखक द्वारा स्वतंत्र रूप से विकसित की गई है।

वैदिक गणित के कई विशेष पहलु व लक्षण जिनकी विस्तृत चर्चा अभी के बजाय आगे की जायेगी, क्योंकि आप पद्वति को कार्य करते देख कर ही उसकी पूरी सराहना कर सकते हैं। लेकिन अभी के लिए कुछ बिन्दू हैं :

1) भारती कृष्ण ने जिस पद्वति की पुनः खोज की है वह 16 सूत्रों और कुछ उपसूत्रों पर आधारित है। यह सूत्र शब्दों के रूप में दिए हैं: उदाहरण के लिए ''पहले से एक अधिक'' और ''ऊर्ध्व तिर्यग्भ्याम'' इस किताब में इसे इटालिक करके दर्शाया है। सूत्र को मस्तिष्क के प्राकृतिक कार्य से जोड़ा जा सकता है – जैसे सम्पूर्ण करना (completing the whole), उपमा देना, सामान्यीकरण आदि।

2) इतना ही नहीं कि यह पद्धति सामान्य व अद्‌भुत तरीके जो कि पूर्व में आधुनिक गणित के लिए अंजान थे, देती है लेकिन यह और अधिक सुसंगत और एकीकृत पद्धति है ।

3) वैदिक गणित मानसिक गणित की प्रणाली है (यद्यपि यह लिखकर भी की जाती है)।

बहुत से वैदिक तरीके नये, सरल, और प्रभावशाली हैं। ये सुन्दरता से आपस में सम्बन्धित हैं, इसलिए ''भाग'' को हम उदाहरण के तौर पर, एक सरल गुणन के विपरीत तरीके के रूप में देख सकते हैं (इसी तरह वर्ग व वर्गमूल को) । वैदिक तरीके, प्रचलित तरीकों से काफी भिन्न हैं क्योंकि वैदिक पद्धति से परिचित होने के लिए ज्यादा उचित है कि आप जैसे–जैसे आगे बढें इस तकनीकी का अभ्यास करते जायें।

''सूत्र गणित की सभी शाखाओं के सभी अध्यायों में सभी विभागों पर लागू होते हैं (अंकगणित, बीजगणित, रेखागणित–समतल तथा गोलीय, त्रिकोणमिति–समतल तथा घन ज्यामितीय तथा वैश्लेषिक) शांकव, ज्योतिर्विज्ञान, समाकलन तथा अवकल कलन इत्यादि। वास्तव में शुद्व अथवा प्रयुक्त गणित में ऐसा कोई भाग नहीं जिसमें कि उनका अनुप्रयोग न हो।

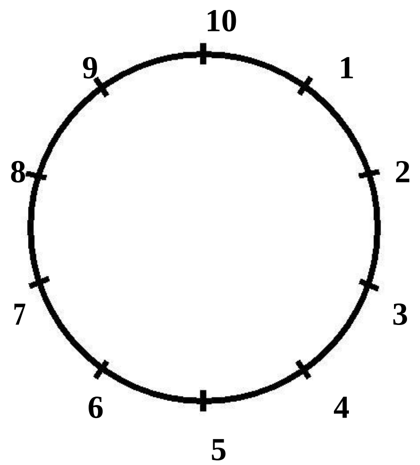
वैदिक गणित पेज. xvi.

1.2 दस बिन्दु वृत्त

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 . . .

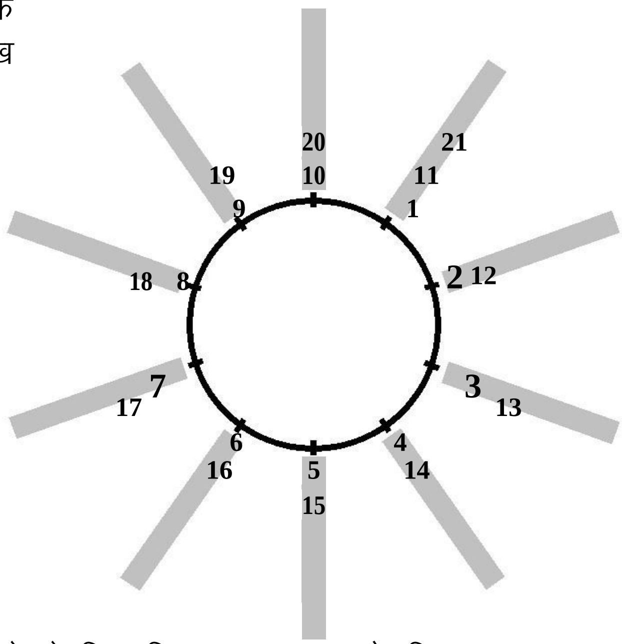
संख्याओं की शुरूआत प्रथम अंक 1 से होती है।
इसके बाद अंक 2 फिर अंक 3 इस तरह क्रम बढ़ता जाता है।
सूत्र *'पहले से एक अधिक' (by one more then one before),* 1 से विभिन्न अंकों की उत्पत्ति का वर्णन करता है ।
अंकगणित संख्याओं के व्यवहार का अध्ययन है, जिस तरह प्रत्येक व्यक्ति अलग होता है ऐसा ही संख्याओं के साथ है।
प्रत्येक संख्या में एक विशेषता होती है, और जब हम संख्याओं को जान जाते हैं तो वे एक दोस्त की तरह होते हैं।
[कुछ संख्याएं जहां वे प्रकट होती हैं, इनकी चर्चा यहां की जा सकती है]

प्रथम 10 अंकों को वृत्त की परिधि पर दर्शाना उपयोगी होता है।



हम 10 बिन्दु वृत्त बनाने के लिए 9 अंकों और शून्य का उपयोग करते हैं। 9 के आगे की संख्याओं के लिए हम दो या अधिक अंकों को एक साथ रख कर 10,11,12 आदि बनाते हैं।

शाखा–1 को आगे बढ़ाते हुए वृत्त के बाहर परिधि पर जहां 1 है वहां 11 रखा जा सकता है । इसी तरह 2 के आगे 12 और क्रमशः ।

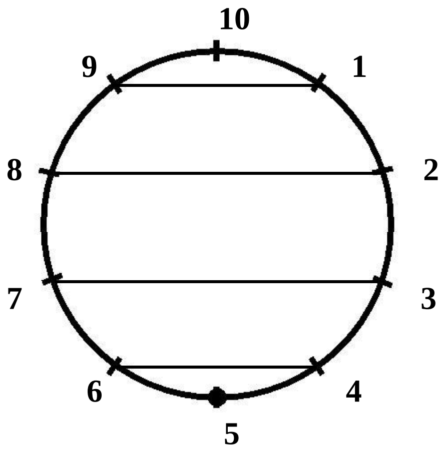


उपर दर्शाये गये वृत्त का उपयोग जोड़ने और घटाने के लिए किया जा सकता है, जिस तरह हम नम्बर लाईन का उपयोग करते हैं। वृत्त की शाखा का निरीक्षण करने पर पता चलता है कि हर शाखा पर सभी संख्याओं के अंतिम अंक समान हैं और उपर की शाखा पर सभी संख्याएें 10 की गुणक हैं।

1.3 10 के गुणक

यह महत्वपूर्ण है कि हम अंकों के 5 समूह को पहचानें जो जोड़ने पर 10 होते हैं।

1 + 9 = 10, 2 + 8 = 10, 3 + 7 = 10, 4 + 6 = 10, 5 + 5 = 10.



उपरोक्त समूह को 10 बिन्दु वृत्त पर दर्शाया गया है।
सूत्र *''अपूर्ण को पूर्ण करके''* *(By the Completion)* यह बताता है कि हम सभी में यह योग्यता है कि हम इस पूर्णता को देख सकते हैं व इसका उपयोग कर सकते हैं।

अभ्यास -A नीचे दिये गये प्रश्नों को हल करें :

a 6 + 4 **b** 4 + 16 **c** 5 + 25 **d** 13 + 7 **e** 22 + 8

f 38 + 2 **g** 54 + 6 **h** 47 + 3 **i** 61 + 9 **j** 85 + 5

a	**10**	**b**	**20**	**c**	**30**	**d**	**20**	**e**	**30**
f	**40**	**g**	**60**	**h**	**50**	**i**	**70**	**j**	**90**

10 को दूसरे तरीके से भी पूर्ण कर सकते हैं।

1 उदाहरण, **24 + 26** सरल है क्योंकि ईकाई अंक 4 और 6 मिलकर 10 होता है अतः जोड़ **24 + 26 = 50.**

''छोटे बच्चे नाचते हुए खुशी के साथ आते हैं और व्याख्याता पूछतें हैं ''उतर बिना बीच के चरण (Step) लिखे कैसे निकाल सकते हैं''.
वैदिक मेटाफिजिक्स पेज. 168

अभ्यास -B नीचे लिखी संख्या को जोड़ें:

a 37 + 23 **b** 42 + 28 **c** 54 + 16 **d** 49 + 21

e 45 + 35 **f** 72 + 18 **g** 38 + 22 **h** 35 + 35

---

a 60 b 70 c 70 d 70
e 80 f 90 g 60 h 70

1.4 10 से कमी

वैदिक सूत्र *''कमी से''* *(By Deficiency)* का सम्बन्ध हमारी स्वाभाविक योग्यता से है, यह देखने के लिए कि कोई चीज पूर्णता से कितनी कम है।

2. आप यह देख सकतें है कि **39**, **40** के समीप है व उससे 1 कम है। इसी तरह **58, 60** के समीप है व उससे **2** कम है।

अभ्यास C नीचे दिये हुए प्रश्नों में खाली स्थान को भरिए।

a 37 पास है और.... कम है

b 49 पास है और.... कम है **c** 68 पास है और..... कम है

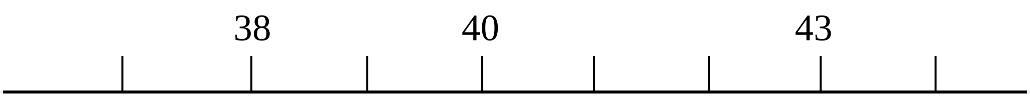
---

a 40, 3 b 50, 1 c 70, 2

कमी व पूर्ण करना एक साथ

यह हमारे जोड़ने की क्रिया को सरल बनाती है क्योंकि कमी को जोड़कर उसे पूर्ण कर सकते हैं।

3 **38 + 5 = ?** हम जानतें हैं कि 38 40 के समीप है और उससे 2 कम है अतः 5 में से 2 निकाल कर हम 38 में मिला देते हैं। इससे हमें 40 प्राप्त होता है और बचे हुए 3 को 40 में जोड़ देते हैं और हमारा जोड़ 43 हो जाता है।



हम नंबर लाइन की कल्पना कर, 1 को निकालकर या 10 बिंदु वृत्त का उपयोग कर निम्न प्रकार के अंकों को जोड़ सकते हैं :–

अभ्यास -D

a 49 + 5 **b** 58 + 3 **c** 37 + 6 **d** 28 + 6

e 79 + 6 **f** 38 + 7 **g** 57 + 7 **h** 69 + 4

a	**54**	**B**	**61**	**c**	**43**	**d**	**34**
e	**85**	**F**	**45**	**g**	**64**	**h**	**73**

1.5 मानसिक जोड़ना

4 जब आप कोई जोड़ करते हैं और उसमें हांसिल आता है जैसा कि 56+26 तो उसे दिमागी स्तर पर इस तरह से जोड़ा जा सकता है।

56+26 में दहाई के अंक को जोड़ने पर 7 दस या 70 और इकाई स्तर पर 6+6= 12 अतः 70+12= 82 प्राप्त होगा

इसलिए **56+26=82**

$$\begin{array}{r} 56 \\ +\underline{26} \\ \underline{82} \\ 1 \end{array}$$

उपरोक्त दिये गये जोड़ को इस तरह से भी लिख सकते हैं :

56+26= 7_12= 82, 12 को, $_12$ को इस तरह लिखना दर्शाता है कि 12 में 1 हांसिल है जिसे बांई तरफ की संख्या में जोड़ना है।

5 इसी तरह **48+45**= 8_13=**93**

अगर आप चाहें तो बीच की अतिरिक्त चरण (Step) भी लिख सकतें हैं पर सम्भव हो तो इसे दिमागी तौर पर करने की कोशिश करनी चाहिए ।

अभ्यास -E इन्हें कोशिश करें

a 37 + 47 **b** 55 + 28 **c** 47 + 25 **d** 29 + 36

e 56 + 25 **f** 38 + 26 **g** 29 + 44 **h** 35 + 49

a	**84**	**b**	**83**	**c**	**72**	**d**	**65**
e	**81**	**f**	**64**	**g**	**73**	**h**	**84**

सूत्र सहज ही समझ में आ जातें हैं, उनका
अनुप्रयोग सरल है तथा सहज ही याद हो जाते हैं
तथा सारी प्रक्रिया ''मौखिक'' है।
वैदिक गणित सें, पेज xvii.

सम्पूर्ण करना

नीचे दी गई पहेली में तीन ऐसी संख्या खोजें जिनका जोड़ 10 हो। इस पहेली के 8 उत्तर हैं जिसमें से आपको 1 दिया गया हैः 1+2+7=10
लेकिन आप 1+2+7 को दूसरे उत्तर के रूप में नहीं ले सकते हैं, अंक दूसरे होने चाहिए।
आप शून्य का उपयोग नहीं कर सकते हैं लेकिन अंक 1 से अधिक बार उपयोग कर सकते हैं।

अभ्यास -F देखिए आप कितने निकाल सकते हैं:

$\boxed{1} + \boxed{2} + \boxed{7} = \boxed{10}$ $\qquad$ $\boxed{} + \boxed{} + \boxed{} = \boxed{10}$

$\boxed{} + \boxed{} + \boxed{} = \boxed{10}$ $\qquad$ $\boxed{} + \boxed{} + \boxed{} = \boxed{10}$

$\boxed{} + \boxed{} + \boxed{} = \boxed{10}$ $\qquad$ $\boxed{} + \boxed{} + \boxed{} = \boxed{10}$

$\boxed{} + \boxed{} + \boxed{} = \boxed{10}$ $\qquad$ $\boxed{} + \boxed{} + \boxed{} = \boxed{10}$

	2+2+6
1+1+8	**2+3+5**
1+3+6	**2+4+4**
1+4+5	**3+3+4**

जहां बहुत से अंकों को जोड़ना हो तो यह अच्छा विचार है कि 10 के गुणक को देखें (अर्थात् 10, 20, 30 आदि)

6 उदाहरण के तौर पर अगर हमें **6 + 7 + 4** को हल करना है तो हम देखेंगे कि 6 और 4 मिलाकर 10 होते हैं और 10 में 7 जोड़ने पर 17 होते हैं इसलिए **6 + 7 + 4 = 17.**

7 इसी तरह **3 + 6 + 2 + 5** में 3, 2, 5 मिलकर 10 होते हैं इसलिए इन्हें पहले जोड़ें व बाद में 6 जोड़ें जिससे 16 प्राप्त हुआ **3 + 6 + 2 + 5 = 16**.

अभ्यास -G इन्हें कोशिश करें:

a 3 + 2 + 8 $\qquad$ **b** 9 + 8 + 1 $\qquad$ **c** 7 + 2 + 4 + 3

d 4 + 5 + 5 + 7 $\qquad$ **e** 8 + 9 + 2 $\qquad$ **f** 7 + 6 + 2 + 4

g 8 + 8 + 3 + 2	**h** 7 + 6 + 3 + 4	**i** 4 + 7 + 4 + 2
j 6 + 9 + 2 + 2	**k** 7 + 5 + 1 + 2	**l** 3 + 5 + 4 + 3

a	**13**	**b**	**18**	**c**	**16**
d	**21**	**e**	**19**	**f**	**19**
g	**21**	**h**	**20**	**i**	**17**
j	**19**	**k**	**15**	**l**	**15**

हम बड़े अंको को भी 10 के गुणक में पूर्ण कर सकते हैं।

8 उदाहरण के लिए **19 + 8 + 1** में आप देखते हैं कि 19+1 मिलकर 20 होते हैं। अतः इन्हें पहले जोड़कर बाद में 8 जोड़ना सरल है।
इसलिए **19 + 8 + 1 = 28.**

9 माना कि हम चाहते हैं **33 + 28 + 4 + 32.**
हमारा ध्यान 28 व 32 पर जाने पर पायेंगे कि ये मिलकर 10 के गुणक हैं इसलिए इन्हें जोड़ें जिससे 60 प्राप्त होता है
अब 33 जोड़ने पर 93 और इसमें 4 जोड़ने पर 97 प्राप्त होता है
इसलिए **33 + 28 + 4 + 32 = 97.**

$$\mathbf{33 + 28 + 4 + 32 = 97}$$

अभ्यास -H उपरोक्त दिये गये तरीके से इन्हें जोड़ें :

a 29 + 7 +1 + 5	**b** 16 + 3 + 6 + 17	**c** 8 + 51 + 12 + 3
d 37 + 7 + 21 + 13	**e** 13 + 16 + 17 + 24	**f** 12 + 26 + 34 + 8
g 33 + 25 + 22 + 15	**h** 18 + 13 + 14 + 23	**i** 3 + 9 + 5 + 7 + 1
j 27 + 15 + 23	**k** 43 + 8 + 19 + 11	**l** 32 + 15 + 8 + 4
m 24 + 7 + 8 + 6 + 13	**n** 6 + 33 + 24 + 17	**o** 23 + 48 + 27

a	**42**	**b**	**42**	**c**	**74**
d	**78**	**e**	**70**	**f**	**80**
g	**95**	**h**	**68**	**i**	**25**
j	**65**	**k**	**81**	**l**	**59**
m	**58**	**n**	**80**	**o**	**98**

अंकों के स्तंभ(Columns)

दूसरे रूप में 10 को पूरा करने का उपयोग स्तंभ के अंकों को जोड़ने में भी कर सकते हैं।

उदाहरण के लिए अगर आपको निकालना

```
  2 7
  3 5
  6 3
  8 2 +
_____
```

आप देखते हैं कि इकाई स्तंभ में 7 और 3 हैं जिसका जोड़ 10 होता है, इसलिए इस स्तंभ में कुल मिलाकर 17 हुए।
हम 7 को नीचे रखकर बायें और 1 हांसिल लेते हैं जैसा दर्शाया गया है :

```
  2 7
  3 5
  6 3
  8 2 +
    7
  1
```

तब हम दहाई स्तंभ में उन दो अंकों को देखते हैं
जिनको मिलाकर 10 होता है।
आप देखते है कि 2+8=10 और इसलिए जोड़ 19 आता है।
हांसिल 1 जोड़ने पर 20, जो आप नीचे रखते हैं।

```
  2 5
  3 5
  6 3
  8 2 +
2 0 7
  1
```

अभ्यास -I इन्हें कोशिश करें:

a	b	c	d	e
44	35	48	6327	549
22	76	38	584	182
65	45 +	62	743 +	317
86 +		71 +		241
				726
				321 +

a 217 b 156 c 219 d 7654 e 2336

11 अब अगर आपके पास है:

$$\begin{array}{r} 8\;\,24 \\ 6\;\,56 \\ 85 \\ 38 \\ \hline \\ \hline \end{array} \; +$$

हम तुरंत 10 (4+6) पहले कॉलम में देखते हैं। और वहाँ 13 (5+8) भी हैं। अतः 13 और 10 मिलकर 23 हो जाता है। इसलिए आप प्रथम कॉलम में 3 रख देते हैं और 2 हांसिल अगले कॉलम में जोड़ने के लिए

$$\begin{array}{r} 8\;\,24 \\ 6\;\,56 \\ 85 \\ 38 \\ \hline 3 \\ \hline {}_{2}\;\, \end{array} \; +$$

दूसरे कॉलम में आप देखते हैं 10 (2+8) और 8 (5+3) भी।
इनको मिलाकर 18 और हांसिल जोड़ने पर 20 हुआ।
अतः 0 रखें और 2 हांसिल।

$$\begin{array}{r} 8\;\,24 \\ 6\;\,56 \\ 85 \\ 38 \\ \hline \underline{1}\;\underset{2}{\underline{6}}\;\underset{2}{\underline{0}}\underline{3} \end{array} \; +$$

अंत में (8+6)=14 अंतिम बायें कॉलम में और 2 हांसिल मिलकर 16 हुआ। जिसे आप नीचे रखते हैं।

अभ्यास -J इन्हें कोशिश करें:

a
$$\begin{array}{r} 47 \\ 23 \\ 36 \\ 36 \\ \hline \\ \hline \end{array} \; +$$

b
$$\begin{array}{r} 35 \\ 28 \\ 57 \\ 32 \\ \hline \\ \hline \end{array} \; +$$

c
$$\begin{array}{r} 48 \\ 39 \\ 88 \\ 71 \\ \hline \\ \hline \end{array} \; +$$

d
$$\begin{array}{r} 3\;327 \\ 2\;577 \\ 585 \\ 383 \\ \hline \\ \hline \end{array} \; +$$

e
$$\begin{array}{r} 242 \\ 188 \\ 115 \\ 243 \\ 796 \\ 321 \\ \hline \\ \hline \end{array} \; +$$

a 142 b 152 c 246 d 6872 e 1905

1.6 जोड़ने से और घटाने से

संख्यायें जैसे 9, 19, 18, 38 जो कि 10 के गुणक के समीप हैं। इन्हें विशेषतया जोड़ना घटाना (निकालना) सरल होता है।

12 मानें कि आपको **33 + 9** का पता लगाना है।
चूंकि 9, 10 से 1 कम है हम दी गई संख्या में 10 जोड़कर 1 घटा देते है: 33+10–1. 10 व 33 मिलकर 43, और उसमें 1 घटाने पर 42 बचे।
इसलिए **33 + 9 = 42.**

उपरोक्त उदाहरण सूत्र *''जोड़ने से और घटाने से''* (By Addition and By Subtration) को दर्शाता है।

अभ्यास -K इन्हें कोशिश करें:

a 55 + 9	**b** 64 + 9	**c** 45 + 9	**d** 73 + 9
e 82 + 9	**f** 26 + 9	**g** 67 + 9	**h** 38 + 9

a 64 b 73 c 54 d 82
e 91 f 35 g 76 h 47

13 इसी तरह अगर आप 19 जोड़ रहें हैं, तो 20 जोड़कर 1 घटा देते हैं।
इसलिए **66 + 19 = 85.**

14. और 54+39 को जोड़ने के लिए पहले 40 में 54 को जोड़कर उसमें से 1 घटाने पर 93 उत्तर प्राप्त हो जाता है।
इसलिए 54+39=93।

अभ्यास -L इन्हें कोशिश करें

a 44 + 19	**b** 55 + 29	**c** 36 + 49	**d** 73 + 19
e 47 + 39	**f** 26 + 59	**g** 17 + 69	**h** 28 + 29

a 63 b 84 c 85 d 92
e 86 f 85 g 86 h 57

इसी तरह किसी संख्या में अगर 18 जोड़ना है तो पहले उस संख्या में 20 जोड़कर 2 घटा देतें हैं।

या किसी संख्या में 38 जोड़ने के लिए 40 जोड़कर 2 घटा देते हैं ।

या किसी संख्या में 37 जोड़ने के लिए 40 जोड़कर 3 घटा देते हैं ।

15 इसी तरह उदाहरण के लिए **33 + 48 = 81** आप 50 को 33 में जोड़ते हैं जिससे 83 होते हैं उसमें से 2 घटा दिए क्योंकि 48 है 2 कम 50।

अभ्यास -M इन्हें कोशिश करें:

a	44 + 18	**b**	44 + 27	**c**	55 + 28	**d**	35 + 37
e	62 + 29	**f**	36 + 37	**g**	19 + 19	**h**	28 + 29

a 62 b 71 c 83 d 72
e 91 f 73 g 38 h 57

नीचे दिये गये प्रश्न उपर दिये गये प्रश्नों के समान हैं अन्तर इतना है कि संख्या जो कि 10 गुणक के समीप है वह प्रश्न में पहले दर्शाइ गई है।

16 उदाहरण के लिए **29 + 55** को जोड़ना है।
यहाँ आप 30 को 55 में जोड़कर 1 घटा कर **29 + 55 = 84** प्राप्त करते हैं।

अभ्यास -N इन्हें कोशिश करें:

a	39 + 44	**b**	33 + 38	**c**	48 + 35	**d**	27 + 34
e	33 + 28	**f**	9 + 73	**g**	18 + 19	**h**	26 + 27

a 83 b 71 c 83 d 61
e 61 f 82 g 37 h 53

<u>आधार के पास की संख्याओं को घटाना</u>

इसी तरह का तरीका उन संख्याओं को घटाने के लिए उपयोग किया जा सकता है जो आधार के बिल्कुल निकट हैं।

17 उदाहरण के लिए **55 – 19,** हम देखतें हैं कि 19 20 से 1 कम है। अतः 55 में से 20 निकाले 35 हुआ फिर 1 जोड़े।
इसलिए **55 – 19 = 36**.

18 और **61 – 38 = 23** क्योंकि आप 40 को 61 से निकालने पर (21 हुआ) और फिर 2 जोड़ेंगें।

अभ्यास -O इन्हें कोशिश करें

a 44 – 19	**b** 66 – 29	**c** 88 – 49	**d** 55 – 9
e 52 – 28	**f** 72 – 48	**g** 66 – 38	**h** 81 – 58
i 83 – 36	**j** 90 – 66	**k** 55 – 27	**l** 60 – 57

---

a	**25**	**b**	**37**	**c**	**39**	**d**	**46**
e	**24**	**f**	**24**	**g**	**28**	**h**	**23**
i	**47**	**j**	**24**	**k**	**28**	**l**	**3**

''तथा हम लोगों को स्वयं भी यह खोजकर, कि गणित के अत्यंत कठिन प्रश्नों को (जिन्हें कि गणितीय दृष्टि से अग्रणी आधुनिक पाश्चात्य वैज्ञानिक विश्व ने बहुत अधिक समय, शक्ति तथा धन का खर्च करने के बाद भी बहुत कठिनता से तथा बहुत ही श्रम साध्य विधि से जिनमें कि बहुत सारी कठिन, उबाऊ तथा दुष्कर पैड़िया रहती हैं हल किया है) अथर्ववेद के परिशिष्ठ में निहित अति सरल वैदिक सूत्रों द्वारा सरलतापूर्वक तथा सहज ही कुछ सरल पैड़ियों में मात्र मौखिक विधि द्वारा, हल कर सकते हैं, आश्चर्य हुआ तथा विपुल हर्ष भी।''

''वैदिक गणित'' से, पेज xvi

अध्याय 2
दोगुना व आधा करना

सारांश

2.1 दोगुना – 2, 4, 8 से गुणा करना
2.2 आधा – 2, 4, 8 से भाग देना
2.3 पहाड़ों को आगे बढ़ाना – दोगुना व आधा करके
2.4 गुणा करना 5, 50, 25 से
2.6 भाग देना 5, 50, 25 से

2.1 दोगुना करना

दोगुना करना व आधा करना काफी सरल है और इसका उपयोग जल्दी से सरल गणना करने के लिए किया जा सकता है।

दो एक जैसी संख्याओं को जोड़ना **दोगुना** कहलाता है।

यह वैदिक गणित के सूत्र *''अनुपात''* *(Proportionately)* के अन्तर्गत आता है।

1 उदाहरण के तौर पर **34** को दोगुना करने का मतलब है कि
34 + 34, जो कि **68** है।
34 + 34 = 2 × 34 or 34 × 2.

2 अतः **42** का दोगुना **84**
35 का दोगुना **70**
और **26** का दो गुना **52** है। क्योंकि 26+26 = 52

अभ्यास -A नीचे दी गई संख्याओं को दोगुना करें। सिर्फ उत्तर लिखें।

a 24	**b** 41	**c** 14	**d** 45	**e** 15	**f** 25
g 36	**h** 27	**i** 18	**j** 29	**k** 34	**l** 48

---

a	**48**	**b**	**82**	**c**	**28**	**d**	**90**	**e**	**30**	**f**	**50**
g	**72**	**h**	**54**	**i**	**36**	**j**	**58**	**k**	**68**	**l**	**96**

3 **68** को दोगुना करने के लिए पहले 60 को दोगुना करने का सोचें और उसके बाद में 8 का दोगुना जोड़ें।
60 का दो गुना 120
8 का दो गुना 16
जोड़ने पर 120 और 16 मिलकर **136**

4 **680** को दो गुना करने के लिए 68 को दोगुना करें व अन्त में एक 0 रखें। **1360**

नीचे दिये गये उदाहरण में सिर्फ उत्तर लिखें ।

अभ्यास -B नीचे दी गई संख्या को दोगुना करें।

a 58	**b** 61	**c** 73	**d** 65	**e** 66
f 88	**g** 76	**h** 91	**i** 380	

a	**116**	**b**	**122**	**c**	**146**	**d**	**130**	**e**	**132**
f	**176**	**g**	**152**	**h**	**182**	**i**	**760**		

5 **273** को दोगुना करने के लिए हम 270 और 3 को दोगुना करते हैं।
अतः 540+6= **546**

6 **636** को दोगुना करने के लिए 600 और 36 का दोगुना कर सकते हैं ताकि 1200 और 72 प्राप्त हो जायें।
अतः उत्तर **1272** है।

अभ्यास -C इन्हें दोगुना करें।

a 362	**b** 453	**c** 612	**d** 319	**e** 707
f 610	**g** 472	**h** 626	**i** 1234	**j** 663

a	**724**	**b**	**906**	**c**	**1224**	**d**	**638**	**e**	**1414**
f	**1220**	**g**	**944**	**h**	**1252**	**i**	**2468**	**j**	**1326**

4, 8 से गुणा करना

किसी संख्या में 4 से गुणा करने के लिए उस संख्या को दोबार दोगुना करें।
और 8 से गुणा करने के लिए उस संख्या को 3 बार दोगुना करें।

7 इसलिए **35 × 4** के लिए आप 35 को दोगुना करें 70 हुए
और तब फिर एक बार दो का गुणा करें 140 प्राप्त करने के लिए।
और तब **35 × 4 = 140**.

8 **26 × 8** करने के लिए 26 को 3 बार दोगुना करें।
26 का दोगुना 52, 52 का दो गुना 104 व 104 का दो गुना 208
इसलिए **26 × 8 = 208**.

अभ्यास -D इन्हें कोशिश करें:

a 53 × 4	**b** 28 × 4	**c** 33 × 4	**d** 61 × 4
e 18 × 4	**f** 81 × 4	**g** 16 × 4	**h** 16 × 8
i 22 × 8	**j** 45 × 8		

a	**212**	**b**	**112**	**c**	**132**	**d**	**244**
e	**72**	**f**	**324**	**g**	**64**	**h**	**128**
i	**176**	**j**	**360**				

आधे को व तीन चौथाई को दोगुना करना भी सरल है।

9 **7½ × 8** करने के लिए 7½ को तीन बार दोगुना करें।
आपको 15, 30, 60 प्राप्त हुआ इसलिए, **7½ × 8=60**

10 **2¾ × 8** करने के लिए 2¾ को 3 बार दोगुना करें।
पहली बार दोगुना करने पर 5½, दूसरी बार 11, व तीसरी बार 22
इसलिए **2¾ × 8 = 22**.

अभ्यास -E नीचे लिखे का गुणा करें:

a 8½ × 4	**b** 11½ × 8	**c** 19½ × 4	**d** 2¼ × 4
e 5½ × 8	**f** 9½ × 4	**g** 30½ × 4	**h** 3¼ × 4

a	**34**	**b**	**92**	**c**	**78**	**d**	**9**
e	**44**	**f**	**38**	**g**	**122**	**h**	**13**

2.2 आधा करना

आधा करना दोगुना करने के विपरीत है ।

11 **8** का आधा **4** है

60 का आधा **30** है
30 का आधा **15** है। क्योंकि दो 15 मिलकर 30 बनते हैं(या 20 और 10 का आधा)

अभ्यास -F नीचे लिखी संख्या को आधा करें:

a 10 **b** 6 **c** 40 **d** 14 **e** 50 **f** 90

---

a 5 b 3 c 20 d 7 e 25 f 45

12 **46** का आधा भी **23** क्योंकि 4 और 6 को आधा करने पर 2 और 3 हुआ।

13 **54** का आधा **27** क्योंकि 54= (50+4) और
50, 4 को आधा करने पर 25, 2 प्राप्त हुए
और दोनों को मिलाने पर 27

14 इसी तरह **78** का आधा = 70 का आधा + 8 का आधा = 35+4=**39**

अभ्यास -G इन संख्याओं को आधा करें:

a 36 **b** 28 **c** 52 **d** 18 **e** 34

f 86 **g** 56 **h** 32 **i** 62 **j** 98

---

a 18 b 14 c 26 d 9 e 17
f 43 g 28 h 16 i 31 j 49

संख्या को अलग–अलग करना

हम बड़ी संख्या को अलग–अलग करके उसे सरलता से आधा कर सकते हैं।

15 **178** को आधा करने के लिए आप 100, 70,8 को आधा करें और इन तीनों को जोड़ें

100 का आधा 50
70 का आधा 35
8 का आधा 4
इसलिए 178 का आधा 50+35+4 = **89.**

अभ्यास -H नीचे दी गई संख्या को मानसिक स्तर पर आधा करने की कोशिश करें

a 164	**b** 820	**c** 216	**d** 152	**e** 94	**f** 326
g 234	**h** 416	**i** 380	**j** 256	**k** 456	**l** 57

a 82	**b 410**	**c 108**	**d 76**	**e 47**	**f 163**
g 117	**h 208**	**i 190**	**j 128**	**k 228**	**l 28½**

4, 8 से भाग देना

संख्या संयोग (Halving number) कुछ ऐसा है जिसे दोहराया भी जा सकता है। किसी संख्या को आधा करने का मतलब है उसे 2 से भाग देना, इसे अगर दूसरी बार फिर आधा किया इसका मतलब दी गई संख्या को 4 से भाग देना।

16 **72** को **4** से भाग दें

आप 72 को दो बार आधा करें: 72 का आधा 36 है व 36 का आधा 18 है।
इसलिए **72 ÷ 4 = 18.**

17 **104** को **8** से भाग दें
यहाँ हम तीन बार आधा करें:
104 का आधा 52 है, 52 का आधा 26 है।26 का आधा 13 है।

इसलिए **104 ÷ 8 = 13.**

अभ्यास -I भाग करने के लिये आधा करने की विधि का उपयोग करें :

4 से भाग दें:	**a** 56	**b** 68	**c** 84	**d** 180	**e** 244
8 से भाग दें:	**f** 120	**g** 440	**h** 248	**i** 216	**j** 44

a	**14**	**b**	**17**	**c**	**21**	**d**	**45**	**e**	**61**
f	**15**	**g**	**55**	**h**	**31**	**i**	**27**	**j**	**5½**

2.3 (पहाड़ों) (TABLE) को आगे बढ़ाना

18 अगर आप **18 × 3** को हल करना चाहते हैं, और 18 का पहाड़ा याद नहीं है, चूंकि आप जानते हैं इसलिए इस तरह सोच सकते हैं कि 9 × 3 = 27, तब 18 × 3 इसका दोगुना होना चाहिए, जो **54** है।

19 इसी तरह अगर आप **8 × 7** नहीं जानते हैं, किन्तु 4 × 7 = 28, यह जानते हैं आप सिर्फ 28 को दोगुना कर सकते हैं।
इसलिए **8 × 7 = 56.**

20 **6 × 14** को हल करें :

चूंकि हम 6 × 7 = 42, जानते हैं इसका मतलब **6 × 14 = 84**

नीचे दिये गये प्रश्नों में ऐसा मानें कि आपको 10 × 10, तक की तालिका (Table) आती है, किन्तु अगर आप यह भी पूरी तरह नहीं जानते हैं तब भी इन प्रश्नों का उत्तर देने का तरीका ढूंढ लेंगे।

अभ्यास -J नीचे लिखे को हल करें

a 16 × 7	**b** 18 × 6	**c** 14 × 7	**d** 12 × 9
e 4 × 14	**f** 6 × 16	**g** 7 × 18	**h** 9 × 14

a	**112**	**b**	**108**	**c**	**98**	**d**	**108**
e	**56**	**f**	**96**	**g**	**126**	**h**	**126**

21 **14 × 18** को हल करें।

14 व 18 का आधा 7 और 9 होता है, और चूंकि 7×9=63 आप इसे दो बार दोगुना करें। इसका मतलब एक बार दो गुना करने पर जो संख्या प्राप्त हो उसे फिर दोगुना करें। पहली बार दो गुना करने पर 126 दूसरी बार में 252।
इसलिए **14 × 18 = 252**.

अभ्यास -K इन्हें हल करें:

a 16 × 18 **b** 14 × 16 **c** 12 × 18 **d** 16 × 12

---

a 288 b 224 c 216 d 192

2.4 5, 50, 25 से गुणा करना

अंक 2 और 5 आपस में सम्बन्धित हैं क्योंकि 2 × 5 = 10 और 10 आधार संख्या है।

हम किसी संख्या को 5 से गुणा करने के लिए उस संख्या को 10 से गुणा कर उसे आधा कर परिणाम प्राप्त कर सकते हैं।.

22 **44 × 5** को हल करें :

हम 440 का आधा निकालते हैं जो 220 होता है। इसलिए 44 × 5 = **220**.

23 **87 × 5** को हल करें :

870 का आधा 435 है इसलिए **87 × 5 = 435**.

24 इसी तरह **4.6 × 5** = अर्थात 46 का आधा = **23**

अभ्यास -L नीचे लिखे को गुणा करें।

a 68 × 5 **b** 42 × 5 **c** 36 × 5 **d** 426 × 5

e 8.6 × 5 **f** 5.4 × 5 **g** 4.68 × 5 **h** 0.66 × 5

a	**340**	**b**	**210**	**c**	**180**	**d**	**2130**
e	**43**	**f**	**27**	**g**	**23.4**	**h**	**3.3**

25 **27 × 50** को हल करें।

हम 27 को 100 से गुणा करें व उसे आधा करें। 2700 का आधा 1350। इसलिए **27 × 50 = 1350**.

26 इसी तरह **5.2 × 50** = 520 का आधा = **260**.

27 **82 × 25** को हल करें।
25, 100 के आधे का आधा होता है, इसलिए किसी संख्या को 25 से गुणा करने के लिए हम संख्या को 100 से गुणा कर उसे 2 बार आधा करें। 8200 को दो बार आधा करने पर 2050 आता है अर्थात **82 × 25 = 2050**.

28 इसी तरह **6.8 × 25** = 680 के आधे का आधा = **170**.

अभ्यास -M नीचे लिखे को गुणा करें:

a	46 × 50	**b**	864 × 50	**c**	72 × 25	**d**	85 × 25
e	86.8 × 50	**f**	4.2 × 50	**g**	34.56 × 50	**h**	2.8 × 25

a	**2300**	**b**	**43200**	**c**	**1800**	**d**	**2125**
e	**4340**	**f**	**210**	**g**	**1728**	**h**	**70**

2.5 5, 50, 25 से भाग देना

5से भाग देना

29 **85 ÷ 5 = 17**.

5 से भाग देने के लिए हम पहले दी गई संख्या को दोगुना करें बाद में 10 से भाग दें

इसलिए 85 को दोगुना करने पर 170 और 10 से भाग देने पर 17 प्राप्त होता है।

पिछले उदाहरण में, वैकल्पिक तरीके के लिए दूसरा सूत्र यहाँ उपयोग किया जा सकता है। *''अन्तिम और उपअन्तिम का दुगुना''(The Ultimate and twice the Penultimate)* चूंकि प्रत्येक 10 में 2 बार पांच आते हैं, उपरोक्त प्रश्न 85 ÷ 5 में आप फैसला कर सकते हैं कि 80 में 16 पांच होते हैं, इसलिए 85 में 17 पांच हुए। दूसरे शब्दों में हम 8 को दोगुना करके उसमें 1 जोड़ दें।

30 **665 ÷ 5 = 133** क्योंकि 665 का दोगुना 1330 व 10 से भाग देने पर 133।

31 **73 ÷ 5 = 14.6**.
इसीतरह 73 का दोगुना 146, इसे 10 से भाग देने पर **14.6** हुआ।

अभ्यास -N 5 से भाग दें:

a 65	**b** 135	**c** 375	**d** 470	**e** 505
f 4005	**g** 1235	**h** 7070	**i** 885	**j** 49
k 52	**l** 22.2			

---

a 13	**b 27**	**c 75**	**d 94**	**e 101**
f 801	**g 247**	**h 1414**	**i 177**	**j 9.8**
k 10.4	**l 4.44**			

50, 25 से भाग देना

32 **750 ÷ 50** हल करें

चूंकि 50, 100 का आधा है अतः 50 से भाग देने के लिए संख्या को दोगुना कर उसे 100 से भाग दें

750 का दोगुना 1500 इसे 100 से भाग देने पर 15 प्राप्त हुआ।
इसलिए **750 ÷ 50 = 15**.

फिर वैकल्पिक सूत्र ''अंतिम और उपअंतिम का दुगना'' बतलाता है कि 7 का दोगुना करें और 1 अतिरिक्त जोड़ें जो फिर 15 हुआ, अर्थात 15 बार 50 हुए।

33 **54.32 ÷ 50 = 1.0864**.
54.32 का दोगुना 108.64 हुआ, इसे 100 से भाग देने पर 1.0864 प्राप्त हुआ।

34 **425 ÷ 25** को हल करें

100 का एक चौथाई 25 है अतः 25 से भाग देने के लिए हम संख्या को दो बार दोगुना कर 100 से भाग दें।

425 का दोगुना 850 और इसको फिर दोगुना करने पर 1700 हुआ।
100 से भाग देने पर हमें 17 प्राप्त हुआ। इसलिए **425 ÷ 25 = 17**.

अभ्यास -O 50 से भाग दें:

a 650 **b** 1250 **c** 3300 **d** 8.8 **e** 44 **f** 77

Divide by 25:

g 225 **h** 550 **i** 44 **j** 137 **k** 6

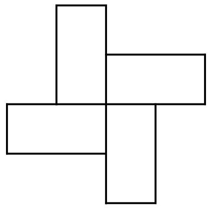
---

a 13 b 25 c 66 D 0.176 e 0.88 f 1.54
g 9 h 22 i 1.76 J 5.48 k 0.24

दूसरा वैकल्पिक तरीका दोगुना व आधा करने के लिए अनुभाग 4.3 में बताया गया है।

“सूत्र बहुत ही लघु होते हैं परन्तु एक बार उन्हें समझने पर और उनमें निहित कार्यविधि के मन में बैठने पर ही सारी विधि एक समस्या के स्थान पर बच्चों का खेल बन जाती है।.”
“वैदिक गणित” से पेज 11

अध्याय 3
अंक जोड़



सारांश

3.1 अंकों को जोड़ना – अंकों की जोड़ प्राप्त करना।
3.2 नौ बिन्दू वृत्त – वृत्त की परिधि पर संख्याओं को दर्शाना।
3.3 अंक नौ को बाहर निकालना – अंकों के जोड़ को सरल करना।
3.4 अंकों के जोड़ की पहेली
3.5 अंकों के जोड़ से जांचना – अंक जोड़ का उपयोग कर जोड़ गुणा आदि को जांचना।
3.6 वैदिक वर्ग– नौ बुनियादी अंकों की विशेषता।
3.7 वैदिक वर्ग से स्वरूप – वैदिक वर्ग का उपयोग कर स्वरूप की रचना करना
3.8 अंक नौ

3.1 अंको को जोड़ना

अंक का मतलब 1 से 9 तक का कोई भी एक अंक। संख्याएँ: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 और 0 जोड़ने का मतलब **टोटल** करना है।

इसलिए 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 ये 1 अंक की संख्या है।

और 10, 11, 12 . . . . 99, ये 2 अंको की संख्याएं हैं।

किसी संख्या का **अंक जोड़** उन सभी अंकों को जोड़ना है जो उस संख्या में है।

1 उदाहरण के लिए **17** का अंक जोड़ निकालने के लिए हम सिर्फ 1 और 7 को जोड़ें– 1 + 7 = 8, इसलिए **17** का अंक जोड़ **8** है।

2 और **123** का अंक जोड़ 6 है क्योंकि 1+2+3=**6**

अंकजोड़ हमारी गणना (हल किए हुए प्रश्न) को जांचने के लिए बहुत उपयोगी हो सकता है, (देखें अनुभाग 3.5, 8.1) जैसे विभाजन क्रिया के परीक्षण में, वर्गमूल निकालने में व बीजगणित में भी (अनुभाग 11.5)

अभ्यास -A इन संख्याओं का अंक जोड़ निकालें:

संख्या	अंक जोड़
13	4
241	7
171	9
242	8
303	6
1213	7
900	9

कभी–कभी अंक जोड़ निकालने के लिए उसे आवश्यकता पड़ने पर दो बार करना पड़ता है।

अंकजोड़ निकालने के लिए संख्या के अकों को जोड़ने के बाद, एक अंक प्राप्त करने के लिए आवश्यक हो तो फिर जोड़ना पड़ता है।

3 इसलिए **19** अंक जोड़ के लिए हम 1 और 9 को जोड़ते हैं जो 10 होता है।
लेकिन 10 में 2 अंक हैं अतः हम फिर जोड़ते हैं: 1+0 = **1**.
इसलिए हम 19 अंक जोड़ को इस तरह से लिख सकते हैं:
19 →10 → 1

4 इसी तरह **39** के लिए हमें प्राप्त होता है 39→ 12→ 3
अतः 39 का अंक जोड़ 3 है।

अभ्यास -B नीचे दी गई संख्या का अंक जोड़ निकालें:

संख्या	अंकजोड़
83	2
614	2
345	3
5555	2
78	6
2379	3
521832	3
999	9

इसका मतलब है कि कितनी भी बड़ी संख्या के अंकजोड़ को एक अंक में निकाल सकते हैं। सभी अंकों को सिर्फ जोड़ें, अगर हमें जोड़ने पर 2 अंक की संख्या प्राप्त होती है तो इसे फिर से जोड़ दें ताकि एक अंक की संख्या प्राप्त हो सके।

3.2 नौ बिन्दू वृत्त

पूर्ण संख्याओं का क्रम 1 से शुरू होकर हर बार 1 से बढ़ता जाता है।

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, **10**, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, **20**, 21 . . . . .

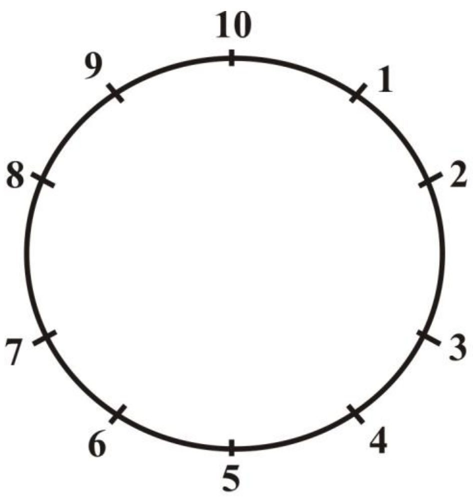
हम हमारे अंक प्रणाली में 10 के क्रम से भली भांति परिचित हैं, 10, 20, 30 इन्हें 10 बिन्दु वृत्त पर स्पष्ट देखा जा सकता है (देखें पेज– 3)।

लेकिन अगर हम संख्या की गणना का अंक जोड़ लें तो हमें मिलता है :

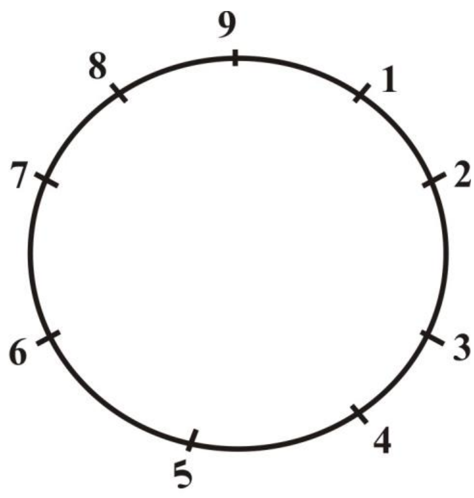
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, **10**, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, **20**, 21 . . . . .
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 2, 3 . . . . .

और यहाँ हम देखते हैं कि 10 के क्रम में एक 9 का क्रम उपस्थित रहता है।

इसलिए हमें एक नौ बिन्दू वृत्त भी चाहिए जिसके कई उपयोग हैं, जैसा कि हम आगे देखेंगे।



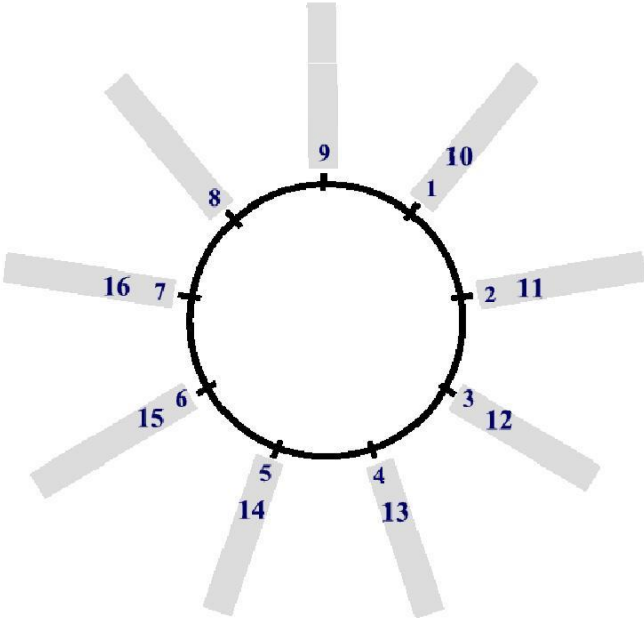
10-बिन्दू वृत्त



10-बिन्दू वृत्त

3.3 नौ के अंक को बाहर निकालना

9 बिन्दू वृत्त ऐसा वृत्त है जिसकी परिधि को 9 बराबर भागों में विभाजित किया गया है और 10 बिन्दू वृत्त की तरह हम इसके चारों ओर नीचे दिये अनुसार लिख सकते हैं।



यहाँ ध्यान देने की बात है कि हर शाखा पर प्रत्येक संख्या का अंक जोड़ एक ही है। उदाहरण के तौर पर शाखा 1 पर 1, 10, 19, 28 आदि हैं, इन सभी का अंक जोड़ एक है।

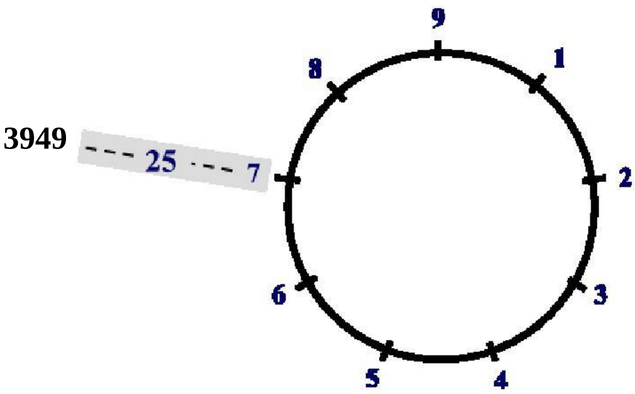
यह दर्शाता है कि 9 को किसी भी संख्या में जोड़ने पर उसके अंक जोड़ में परिवर्तन नहीं होता है। और वास्तव में यह इस प्रकार है कि किसी संख्या में कितने भी 9 जोड़ने या घटाने पर उस संख्या के अंक जोड़ में कोई फर्क नहीं पड़ता है।

> किसी भी संख्या में 9 जोड़ने पर उसके अंक जोड़ में कोई अंतर नहीं होता है। इसलिए उदाहरण के तौर पर 4, 40, 49, 94, 949 सभी का अंक जोड़ 4 है।

5 **3949** का अंक जोड़ **निकालने** के लिए हम 9 को छोड़कर सिर्फ 3 और 4 को जोड़ें।

अतः अंक जोड़ 7 है।

या लम्बा तरीका अपनाकर सभी अंको को जोड़ें 3+9+4+9→ 25 → 7



अभ्यास -C 9 को बाहर निकालने का उपयोग कर नीचे दी गई संख्या का अंक जोड़ निकालें।

संख्या	अंक जोड़
39	3
93	3
993	3
9993	3
9329	5
941992	7
79896	3

जब हम किसी संख्या का अंक जोड़ निकाल रहें हैं तो 9 को **बाहर करने का** एक और तरीका है:

संख्या में कोई भी अंकों का समूह जिसका जोड़ 9 है को अंक जोड़ से बाहर कर सकते हैं।

6 **24701** का अंक जोड़ निकालने पर हम देखते हैं कि इस संख्या में 2 और 7 मिलाकर 9 होते हैं। इसलिए इन्हें छोड़ सकते हैं।
इससे सिर्फ 4, 0, 1 बचता है जिसका जोड़ 5 है।
इसलिए 24701 का अंक जोड़ **5** है।

7 इसी तरह देखेंगे कि **21035** में 1,3,5 मिलकर 9 हुआ इसलिए इन अंकों को निकालने पर सिर्फ 2 बचा। इसलिए यही उत्तर है।
21035 का अंक जोड़ 2 है।

अभ्यास -D 9 को छोड़ कर इन संख्याओं का अंक जोड़ निकालें।

संख्या	अंक जोड़
465	6
274	4
3335	5
6193	1
2532	3
819	9 or 0
723	3

संख्या	अंक जोड़
2346	6
16271	8
9653	5
36247	4
215841	3
7152	6
9821736	9 or 0

9 को व उन अंकों को भी जिनका जोड़ 9 होता है बाहर निकालना, यह वैदिक गणित के सूत्र *''समुच्चय समान होने पर शून्य होता है'' (When the Samuccaya is the Same it is Zero)* के अन्तर्गत आता है। इसलिए 465 में 4 और 5 मिलकर 9 होते हैं जिसे निकाल दिया तो अंक जोड़ 6 है। जब जोड़ वही है (जैसे 9)यह शून्य है (इसे निकाल सकते हैं)। भिन्न की संख्या में (In fraction) सामान्य घटक (Common Factor) को निरस्त करना इसका दूसरा उदाहरण है।

3.4 अंक जोड़ पहेली

कुछ सरल सवाल यहाँ दिये जा सकते हैं जिनमें अंक जोड़ शामिल है।

8 2 अंको वाली संख्या का अंक जोड़ 8 है और दोनो अंक एक समान हैं। वह संख्या क्या है?
वह संख्या स्पष्ट रूप से **44** है।

9 2 अंकों वाली संख्या का अंक जोड़ 9 है और पहला अंक दूसरे अंक का दोगुना है। वह संख्या क्या है?
वह **63** होना चाहिए।

10 दो अंको वाली तीन संख्या बतायें जिनका अंक जोड़ 3 हो।
12, 21, 30 . . .

अभ्यास -E इन सभी नीचे दी गई पहेलियों का उत्तर 2 अंकों वाली संख्या है
इनमें से कुछ का उत्तर एक से अधिक है।
आपको यहाँ अंक–जोड़ के उत्तर और दूसरे तथ्य दिये हैं।

अन्य तथ्य	जोड़	उत्तर	उत्तरों की संख्या
अंको में 3 का अन्तर	5	14 or 41	2
अंक एक समान	6	33	1
पहला अंक दूसरे से दोगुना	6	42	1
अंको में 3 का अन्तर	7	25, 52	2
एक अंक 4 है	7	34, 43	2
दोनो अंक विषम हैं	6	15, 51, 33	3
अंक अनुगामी है *	5	23, 32	2
अंक अनुगामी है *	9	45, 54	2
एक अंक दूसरे का दोगुना	3	12, 21	2
उत्तर 20 से नीचे	8	17	1
संख्या 40 से कम	1	10, 19, 28, 37	5
पहला अंक 2	1	28	1

*** अनुगामी** का मतलब एक के बाद दूसरा अंक जैसे 6 और 7 (या 7 और 6)

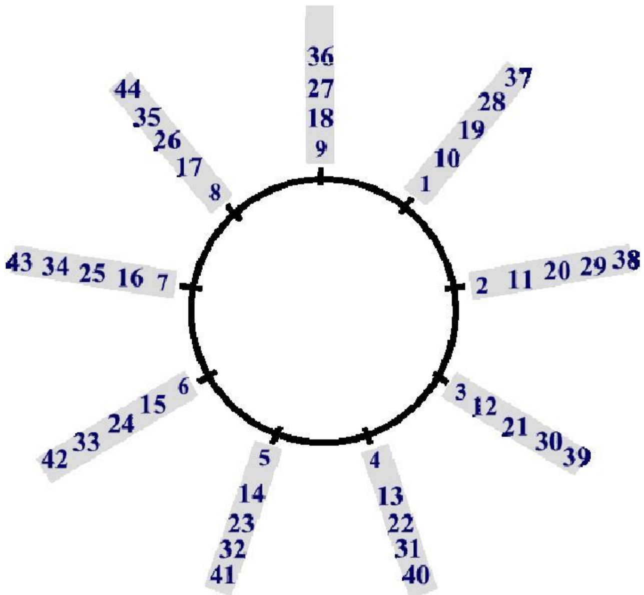
अंक जोड़ की और पहेली

अंक जोड़ के कठिन प्रश्न दिये जा सकते हैं।

नीचे 9 बिन्दू वृत्त पुनः दर्शाया गया है लेकिन संख्याएें 44 तक दिखाई हैं।
ध्यान दें प्रत्येक शाखा की संख्याओं का अंकजोड़ वही है। उदाहरण के लिए शाखा 3 पर दर्शाई गई सभी संख्याओं का अंक जोड़ 3 है।

11 2 अंकों वाली संख्या का अंकजोड़ 5 है और अंक एक समान हैं, वह कौनसी संख्या है?

5 एक विषम संख्या है लेकिन 9 बिन्दू वृत्त देखने पर हम पाते हैं 14, जो कि शाखा 5 पर है। जिसे 7+7 में विभाजित किया जा सकता है। इसलिए वह संख्या **77** होना चाहिए।



अभ्यास -F नीचे दी गई पहेली में आपको सही शाखा चुनने की आवश्यकता होगी और तब उस शाखा की संख्या से सही उत्तर चुनें।
सभी उत्तर 2 अंकों वाली संख्या है।

अंक जोड	अन्य तथ्य	उत्तर
5	संख्या 20 और 30 के बीच में	23
8	उत्तर के अन्त में 5	35
7	पहला अंक 2	25
2	दोनों अंकों में 7 का अन्तर	29, 92

1	उत्तर 7 की तालिका (के पहाड़े) में है	28
3	पहला अंक दूसरे का तीन गुना है	93
4	संख्या 5 की तालिका(पहाड़ा) में है	40
6	अंक एक समान है	33
8	अंतिम अंक पहले का तीन गुना है	26
5	संख्या 8 की तालिका (पहाड़ा) में है	32
9	अंतिम अंक 7	27
3	दोनों अंक विषम	57, 75, 39, 93

3.5 अंक जोड़ से जांचना

उत्तर सही है यह जांचने के लिए आप अंक–जोड़ का उपयोग कर सकते हैं।

12 **32 + 12** को हल करें और अंकजोड़ से उत्तर जांचे।

$$\begin{array}{rl} 32 & \\ \underline{12} & + \\ \underline{44} & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 5 & \\ \underline{3} & + \\ \underline{8} & \end{array}$$

आपके जोड़ का उत्तर 44 हुआ।
32 का अंक जोड़ 5 (3+2=5) और 12 का अंक जोड़ 3 है।
प्रश्न में दी हुई संख्याओं का अंकजोड़ 5+3=8. अगर जोड़ सही की गई है, तो उत्तर में प्राप्त संख्या का अंकजोड़ भी 8 होना चाहिए।
44→ 8; इसलिए इस जांच के अनुसार उत्तर संभवतया सही है।

अतः उत्तर जांचने के लिए 4 क्रम :
1. जोड़ करें
2. जिन संख्याओं को जोड़ा जा रहा है उन संख्याओं के अंकों का जोड़ लिखें।
3. अंकजोड़ को जोड़ें
4. देखें कि दोनों अंक जोड़ समान है

13 **365** और **208** को जोड़ें व उत्तर की जांच करें।

$$\begin{array}{rl} 365 & \\ \underline{208} & + \\ \underline{573} & \\ {\scriptstyle 1} & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 5 & \\ \underline{1} & + \\ \underline{6} & \end{array}$$

1. हमें उत्तर 573 प्राप्त हुआ
2. हम 365,208 का अंकजोड़ निकालते हैं जो 5,1 है
3. 5 और 1 को जोड़ने पर 6 प्राप्त हुआ।
4. 573=6 अंकजोड़ में,जो कि उत्तर सही होने की पुष्टि करता है

अभ्यास -G इन्हें जोड़ें और उत्तर की जांच अंक जोड़ से करें।

a	66 77 +	**b**	57 29 +	**c**	94 58 +	**d**	304 271 +	**e**	787 176 +
f	389 55 +	**g**	5131 676+	**h**	456 209 +	**i**	5555 7777 +		

---

a 143 **3+5=8**	**b 86** **3+2=5**	**c 152** **4+4=8**	**d 575** **7+1=8**	**e 963** **4+5=9**
f 444 **2+1=3**	**g 5807** **1+1=2**	**h 665** **6+2=8**	**i 13332** **2+1=3**	

यहाँ अंकजोड़ जांचने का दूसरा उदाहरण है।

14 **77** और **124** को जोड़ें और जांचे।

77 124 + 201	5 7 + 3	यहाँ जब हम 5 व 7 को जोड़ते हैं तो 12 होता है किन्तु अंक जोड़ में 12 = 3 अतः उत्तर सही है

अभ्यास -H नीचे लिखे को जोड़ें व उत्तर की जांच अंक जोड़ से करें।

a	35 47 +	**b**	56 27 +	**c**	35 59 +	**d**	52 24 +	**e**	456 333 +	**f**	188 277 +
g	78 87 +	**h**	66 48 +	**i**	555 77 +	**j**	823 37 +	**k**	3760 481 +		

---

a 82 **8+2=1**	**b 83** **2+9=2**	**c 94** **8+5=4**	**d 76** **7+6=4**	**e 789** **6+9=6**	**f 465** **8+7=6**
g 165 **6+6=3**	**h 114** **3+3=6**	**i 632** **6+5=2**	**j 860** **4+1=5**	**k 4241** **7+4=2**	

वैदिक गणित सूत्र *''गुणांकों के समूहों का गुणनफल और गुणनफल के गुणांकों का योग समान होगा''* *(The product of Sum is the Sum of the products)* सभी अंक जोड़ जांचने में लागू होता है। जोड़ के लिए यह होगा *''अंक जोड़ का कुल योग है योग का अंक जोड़'' (The Total of the Digit Sums is the Digit Sum of the Total).* उपरोक्त वैदिक सूत्र कई और जगह उपयोग होता है (सन्दर्भ 3 देखें) उदाहरण के लिए समग्र आकृति का क्षेत्रफल निकालने के लिए होगा *''सम्पूर्ण क्षेत्रफल, विभिन्न भागों के क्षेत्रफल के योग के बराबर है'' (The Area of the Whole is the Sum of the Areas).*

सावधान!

इस जोड़ की जांच करें

$$\begin{array}{r} 279 \\ \underline{121} + \\ \underline{490} \end{array} \qquad \text{जांच है:} \begin{array}{l} 9 \\ \underline{4} + \\ \underline{4} \end{array}$$

जो उत्तर की पुष्टि करता है।
किन्तु अगर हम जोड़ को फिर करके देखें तो हम पायेंगे कि पहले जो जोड़ की थी वह गलत है। यह क्रिया हमें बताती है कि अंक जोड़ तरीका हमेशा गलती नहीं निकालता है। आम तौर पर यह काम करता है पर हमेशा नहीं।

हम बाद में जांच करने के दूसरे तरीके को देखेंगे।

गुणनफल की जांच

संख्याओं का गुणा करना उदाहरण के तौर पर 38 × 3, ये सीधी–साधी प्रक्रिया है। हम प्रश्न को नीचे दिये गये प्रकार से लिखेगें और 38 के प्रत्येक अंक को 3 से दाहिने ओर से शुरू करते हुए गुणा करेंगें।

15 प्रश्न

$$\begin{array}{r} 3\ 8 \\ 3 \\ \hline 1\ 1\ 4 \\ {\scriptstyle 2\ \ } \end{array} \times \qquad \text{जांच:} \begin{array}{l} 2 \\ \underline{3} \times \\ \underline{6} \end{array}$$

उपर अंक जोड़ जांच भी की गई है। जिन संख्याओं का गुणा किया जा रहा है उनका अंकजोड़ 2 और 3 है। और जब इनका गुणा किया तब **गुणनफल** 6 आया। चूंकि उत्तर 114 का अंकजोड़ भी 6 है, यह दर्शाता है कि सम्भवतया उत्तर सही है।

16

$$\begin{array}{r} 6\ 2 \\ 4 \\ \hline 2\ \ 4\ 8 \end{array} \times \qquad \text{जांच:} \begin{array}{l} 8 \\ \underline{4} \times \\ \underline{5} \end{array}$$

(क्योंकि 8×4=32 और 3+2=5)

चूंकि 448 का अंक जोड़ वही है जो कि 8×4 का है, जांच से इस बात की पुष्टि होती है कि उत्तर सही है।

17

$$\begin{array}{r} 3\ \ 8\ \ \ 3\ 9 \\ 6 \\ \hline 2\ 3\ 0\ \ \ 3\ 4 \\ {\scriptstyle 5\ \ 2\ \ \ \ 5\ \ } \end{array} \times \qquad \text{जांच:} \begin{array}{l} 5 \\ \underline{6} \times \\ \underline{3} \end{array}$$

इसे जांचने के लिए हम 3839 का अंक जोड़ निकालते हैं जो 5 है। और 5 × 6 को गुणा कर अंक जोड़ निकालते हैं। (5 × 6=30 →3)
23034 का अंक जोड़ भी 3 है, इसलिए उत्तर सही होने की पुष्टि होती है।

अभ्यास -I नीचे दी गई संख्याओं का गुणा करें और प्रत्येक को अंकजोड़ से जांचे।

a 88 × 8 **b** 32 × 3 **c** 73 × 4 **d** 717 × 6

e 234 × 5 **f** 533 × 2 **g** 3115 × 3 **h** 142857×7

---

a 704 (2) **b 96 (6)** **c 292 (4)** **d 4302 (9)**
e 1170 (9) **f 1066 (4)** **g 9345 (3)** **h 999999 (9)**

3.6 वैदिक वर्ग

नीचे दी गई गुणनफल तालिका में कई दिलचस्प स्वरूप (pattern) और गुण हैं।

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

हम उपर दी हुई तालिका की प्रत्येक संख्या को अंक जोड़ में बदल कर **वैदिक वर्ग** बनाते हैं, जैसा कि नीचे दिखाया गया है:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	1	3	5	7	9
3	6	9	3	6	9	3	6	9
4	8	3	7	2	6	1	5	9
5	1	6	2	7	3	8	4	9
6	3	9	6	3	9	6	3	9
7	5	3	1	8	6	4	2	9
8	7	6	5	4	3	2	1	9
9	9	9	9	9	9	9	9	9

1 से 9 तक के प्रत्येक अंक का अपना स्वयं का एक स्वरूप, वैदिक वर्ग में होता है।

> **18** उदाहरण के लिए अंक 1 के स्वरूप को बनाने के लिए, हम उस वर्ग में रंग भरें जिसमें अंक 1 है।
>
> दूसरा तरीका यह भी है कि हम उस वर्ग में जहां ''1'' है, एक बिन्दू लगायें और एक दिलचस्प आकार बनाने के लिए बिन्दुओं को जोड़ें।

अभ्यास -J नीचे दिये गये वर्ग का उपयोग कर 1 से 9 तक के अंकों के लिए स्वरूप बनायें।

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	1	3	5	7	9
3	6	9	3	6	9	3	6	9
4	8	3	7	2	6	1	5	9
5	1	6	2	7	3	8	4	9
6	3	9	6	3	9	6	3	9
7	5	3	1	8	6	4	2	9
8	7	6	5	4	3	2	1	9
9	9	9	9	9	9	9	9	9

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	1	3	5	7	9
3	6	9	3	6	9	3	6	9
4	8	3	7	2	6	1	5	9
5	1	6	2	7	3	8	4	9
6	3	9	6	3	9	6	3	9
7	5	3	1	8	6	4	2	9
8	7	6	5	4	3	2	1	9
9	9	9	9	9	9	9	9	9

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	1	3	5	7	9
3	6	9	3	6	9	3	6	9
4	8	3	7	2	6	1	5	9
5	1	6	2	7	3	8	4	9
6	3	9	6	3	9	6	3	9
7	5	3	1	8	6	4	2	9
8	7	6	5	4	3	2	1	9
9	9	9	9	9	9	9	9	9

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	1	3	5	7	9
3	6	9	3	6	9	3	6	9
4	8	3	7	2	6	1	5	9
5	1	6	2	7	3	8	4	9
6	3	9	6	3	9	6	3	9
7	5	3	1	8	6	4	2	9
8	7	6	5	4	3	2	1	9
9	9	9	9	9	9	9	9	9

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	1	3	5	7	9
3	6	9	3	6	9	3	6	9
4	8	3	7	2	6	1	5	9
5	1	6	2	7	3	8	4	9
6	3	9	6	3	9	6	3	9
7	5	3	1	8	6	4	2	9
8	7	6	5	4	3	2	1	9
9	9	9	9	9	9	9	9	9

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	1	3	5	7	9
3	6	9	3	6	9	3	6	9
4	8	3	7	2	6	1	5	9
5	1	6	2	7	3	8	4	9
6	3	9	6	3	9	6	3	9
7	5	3	1	8	6	4	2	9
8	7	6	5	4	3	2	1	9
9	9	9	9	9	9	9	9	9

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	1	3	5	7	9
3	6	9	3	6	9	3	6	9
4	8	3	7	2	6	1	5	9
5	1	6	2	7	3	8	4	9
6	3	9	6	3	9	6	3	9
7	5	3	1	8	6	4	2	9
8	7	6	5	4	3	2	1	9
9	9	9	9	9	9	9	9	9

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	1	3	5	7	9
3	6	9	3	6	9	3	6	9
4	8	3	7	2	6	1	5	9
5	1	6	2	7	3	8	4	9
6	3	9	6	3	9	6	3	9
7	5	3	1	8	6	4	2	9
8	7	6	5	4	3	2	1	9
9	9	9	9	9	9	9	9	9

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	1	3	5	7	9
3	6	9	3	6	9	3	6	9
4	8	3	7	2	6	1	5	9
5	1	6	2	7	3	8	4	9
6	3	9	6	3	9	6	3	9
7	5	3	1	8	6	4	2	9
8	7	6	5	4	3	2	1	9
9	9	9	9	9	9	9	9	9

3.7 वैदिक वर्ग से स्वरूप (Pattern) रचना

विशेष स्वरूप की रचना के लिए भी वैदिक वर्ग उपयोगी है। नीचे फिर एक वर्ग 'ए से आई' तक की लाइन दर्शाते हुए है।

A	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
B	**2**	**4**	**6**	**8**	**1**	**3**	**5**	**7**	**9**
C	**3**	**6**	**9**	**3**	**6**	**9**	**3**	**6**	**9**
D	**4**	**8**	**3**	**7**	**2**	**6**	**1**	**5**	**9**
E	**5**	**1**	**6**	**2**	**7**	**3**	**8**	**4**	**9**
F	**6**	**3**	**9**	**6**	**3**	**9**	**6**	**3**	**9**
G	**7**	**5**	**3**	**1**	**8**	**6**	**4**	**2**	**9**
H	**8**	**7**	**6**	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**	**9**
I	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**

किसी एक स्वरूप की रचना करने के लिए हम वर्ग की एक लाईन का शुरूआती बिन्दू और एक घूर्णन (ROTATION) कोण चुनें।

19 मानो कि हमने D लाईन D(4 8 3 7 2 6 1 5 9) को चुना व यहाँ से शुरूआत की। हम घुमाव के लिए 90^0 वामावर्त दिशा (anticlockwise) भी चुनते हैं।

एक ग्राफ पेपर लें और एक बिन्दू नीचे बायें किनारे पर लगायें (आपको इससे 2 सेमी बायें ओर की जगह लगेगी)

हम हमेशा शुरू करने के लिए दाहिनी ओर बढ़ते हैं और लाईन में दिये गये अंक दर्शाते है कि कितना सेमी. बढ़ना है। (इसके लिए राय दी जाती है कि पहले पेंसिल का उपयोग करें)

इसलिए अब हम अपना स्वरूप बना सकते हैं: पहले हम एक लाईन 4 सेमी. दाहिनी ओर खींचे
तब 90^0 वाम वर्त (Anti clock wise) घूमें (बांयी ओर) और एक लाईन 8 सेमी. उपर खींचे।
तब 90^0 वाम वर्त और 3 सेमी लम्बी लाईन खींचें
फिर 90^0 वाम वर्त और 7 सेमी लम्बी लाईन खींचें, इस तरह आगे क्रिया संभव है ।
जब आप लाईन के अन्त तक पहुंचें आप लाईन के शुरू वाले बिन्दू से शुरू करें। इस तरह आप अपने शुरूआती बिन्दू पर पहुंच जायेंगे और आपकी रचना पूर्ण हो जाएगी।

अभ्यास -K

a उपर वर्णित स्वरूप को खींचें।

b पुनः लाईन D का उपयोग करते हुए दूसरी रचना बनाने की कोशिश करें लेकिन अब घूर्णन कोण 60^0 हो सकता है और इसलिए ग्राफ पेपर के स्थान पर ''त्रिकोणिय स्पॉटी पेपर'' (Triangular Spoty Paper) का उपयोग कर सकते हैं।

अब आपकी शीट की लम्बी तरफ (Long side) नीचे एक बिन्दू, सबसे नीचे की लाईन के मध्य में चिन्हित करें।
पुनः हम 4 सेमी. दाहिने की ओर बढ़ना शुरू करते हैं, तब हम **60^0** बायें घूम कर एक लाईन **8** सेमी लम्बी खीचें।
तब हम **60^0** बायें घूम कर एक लाईन **3** सेमी लम्बी खीचें।
और ऐसे ही आगे करें उसी तरह जैसे पहले किया था। सिर्फ कोण को 90° के बजाय 60^0 से घूमायें

c त्रिकोणीय स्पोटी पेपर के दूसरे पन्ने पर एक निशान मध्य में चिन्हित करें और पेपर के उपर से 2 लाईन नीचे बनायें। इस बार लाईन E को चुनें (starting at the beginning) और वाम वर्ता (Anti Clock wise) दिशा में 120° घूमायें।
इसके लिए स्वरूप खींचे।

(आप कॉलम व कर्ण (diagonals) का उपयोग भी वैदिक वर्ग में कर सकते हैं। इसी तरह लाईन या उनके संयोजन का भी।
जो चित्र इस किताब में प्रत्येक अध्याय के शुरू में दिया है, वह वैदिक वर्ग का इसी तरह उपयोग कर बनाया गया है।

3.8 नौ अंक

हमारी अंक प्रणाली में ''नौ'' सबसे बड़ा अंक है। अंक नौ के कई उल्लेखनीय गुण हैं जो इसे अत्यन्त उपयोगी बनाते हैं।
आपने पहले भी देखा कि इसका उपयोग अंक जोड़ निकालने में किया जा सकता है और किसी संख्या का अंक जोड़ नौ जोड़ने व घटाने से बदलता नहीं है।
अब 9 की तालिका (पहाड़े) को देखें

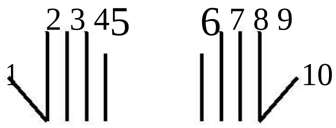
9 × 1 = 9
9 × 2 = 1 8
9 × 3 = 2 7
9 × 4 = 3 6
9 × 5 = 4 5
9 × 6 = 5 4
9 × 7 = 6 3
9 × 8 = 7 2
9 × 9 = 8 1
9 × 10 = 9 0
9 × 11 = 9 9
9 × 12 =10 8

अगर हम गुणनफल को देखें तो पायेंगे कि प्रत्येक संख्या का अंक जोड़ 9 है। आप देखेंगे कि यदि आप उत्तर को 2 कॉलम की तरह पढ़ें तो अंक बायें कॉलम में उपर से नीचे बढ़ रहें हैं। और दाहिने कॉलम में उपर से नीचे की ओर कम हो रहें हैं। उदाहरण के लिए बांया कॉलम –1,2,3,4 उपर से नीचे बढ़ रहा है।
दाहिना कॉलम 9, 8, 7 उपर से नीचे कम हो रहा है।

इस गुण के कारण 9 की तालिका (Table) सरल हो जाती है।

अपनी उंगलियों का उपयोग कर 9 से गुणा करना भी संभव है।

माना कि आपकी हाथ की उंगलियों पर नीचे दिये प्रकार से अंक चिन्हित हैं:



4 में 9 का गुणा करने के लिए सिर्फ चौथी अंगूली को मोड़ें हम पायेंगे कि मुड़ी हुई उंगली के बायीं ओर 3 और दाहिनी और 6 उंगलियां हैं।
इसलिए **4 × 9 = 36**.
क्रमशः.........

गुणा करने के लिए 'रशियन पिजेन्ट' Russian Peasant Multiplication के तरीके को पृष्ठ 69 पर देखें।

अध्याय 4
बायें से दायें

सारांश

4.1 जोड़: बायें से दायें
4.2 गुणा: बायें से दायें
4.3 दोगुना व आधा करना: कठिन सवाल को सरल बनाना
4.4 घटाना: बायें से दायें
4.5 घटाने के सवाल की जाँच: अंकजोड़ का उपयोग करके
4.6 घटाने के और सवाल: बड़ी संख्या को बायें से दायें घटाना

4.1 जोड़ना बायें से दायें

सामान्यतः हम गणना दहिने से बायें करते हैं।
यद्यपि यह हमेशा अच्छा तरीका नही है।
बायें से दायें गणना करना सरल, तेज व अधिक उपयोगी होता है।
इसका कारण है कि संख्यायें बायें से दाहिने लिखी व बोली जाती है।
गणना में भी अक्सर हमें पहले के एक, दो या तीन अंक का उत्तर चाहिए और दायेंसे शुरू करने पर हमें पूरी गणना करनी होती है और इसलिए बहुत सा बेकार का काम करना पड़ता है।

बायें से दायें गणना करने से काम में लचीलापन आता है जो कि वैदिक प्रणाली का विषय है। इस अध्याय में सभी गणना मानसिक तौर पर की जायेगी, हम सिर्फ उत्तर लिखेंगे।

1 जोड़ का सवाल

$$\begin{array}{r} 2\ \ 3 \\ \underline{4\ \ 5} + \end{array}$$

इसका उत्तर निकालने में कोई कठिनाई नही है
बायें से दायेंकॉलम का योग **6** और **8**
इसलिए उत्तर **68** है।

2 लेकिन इस सवाल में

$$\begin{array}{r} 4\ \ 5 \\ \underline{3\ \ 8} + \end{array}$$

योग हमें प्राप्त हुआ **7** और **13**, और 13 दो अंकों की संख्या है।
उत्तर 713 नहीं हैः 13 में जो 1 है उसे 7 में जोड़ें
इससे उत्तर में हमें **83** प्राप्त हुआ।

जोड़ना मानसिक तौर पर काफी सरल है, हम पहले कॉलम को जोड़कर उसे 1 से बढ़ा देते हैं, अगर दूसरे कॉलम से हांसिल आता है तो दूसरे कॉलम का अंतिम अंक इसके साथ रख देते हैं।

3 6 6 2 8 + 9 4	5 5 3 5 + 9 0	8 4 5 8 + 1 4 2	5 6 9 6 + 1 5 2
8, 14 = 94	8, 1 0 = 90	13, 12 = 142	1 4, 1 2 = 152

यह बताने के लिए कि कौनसे अंको को एक साथ करना है हमनें घुमावदार लाईन का उपयोग किया है।

> प्रत्येक बार दायेंहाथ के कॉलम का दहाई अंक बायें हाथ के कॉलम में मिलाया है।

अभ्यास -A नीचे दी गई संख्या को मानसिक स्तर पर बायें से दायें जोड़ें:

a 5 6 6 7 +	**b** 8 8 3 3 +	**c** 4 5 6 7 +	**d** 5 4 6 4 +
e 3 9 4 9 +	**f** 2 7 5 6 +	**g** 7 7 8 8 +	**h** 6 3 7 4 +

---

a 123 **b** 121 **c** 112 **d** 118
e 88 **f** 83 **g** 165 **h** 137

4 **187 + 446 = 633.**

1 8 7
4 4 6 +

यहाँ तीन कॉलम का योग **5, 12** और **13** है इसलिए दो हांसिल आवश्यक है।

12 में से 1 को लेकर 5 में जोड़ने पर 6 होता है।
इसलिए जब 5 और 12 को एक साथ किया तो **62** हुआ।
13 में जो 1 है उसे 62 के 2 में जोड़ने पर 63 हुआ।
इसलिए 62 और 13 को एक साथ करने पर उत्तर **633** आया।

यह महत्वपूर्ण है कि मानसिक रूप से बायें से दायें जोड़ करने के लिए इसे ठीक से समझें। पहले अंक 5 के बारें में सोचें जो बायें कॉलम के अंकों की जोड़ है।
तब हमारे पास 5, 12 है जिसे मानसिक तौर पर मिलाने पर 62 हुए।

62 को दिमाग में रखें और तीसरे कॉलम की जोड़ के साथ हमारे पास 62, 13 है जो 633 हुआ।

5

7 7 7
4 5 6 +

पहले दो कॉलम का जोड 11, 12 है जो 122 हुआ।

तब तीसरे कॉलम के जोड़ के साथ हमारे पास 122, 13 बचा जिसका जोड़

6

1233 हुआ।

5 5 5 5
3 1 3
6 2 4 +

बायें से शुरू करने पर हमारे पास 5, 14 = 64

तब 64,8 = 648 है (**यहाँ कोई हांसिल नहीं है** क्योंकि 8 एक अंक है) अंत में 648, 12= **6492.**

अभ्यास -B नीचे दिये गये को बायें से दायें मानसिक स्तर पर जोड़ें।

a 3 6 3 4 5 6 +	**b** 8 1 9 9 1 8 +	**c** 7 7 7 4 4 4 +	**d** 7 3 7 1 3 9 +
e 3 4 5 9 3 7 +	**f** 1 3 6 9 3 8 8 3 +	**g** 9 6 3 1 8 7 0 9 +	**h** 4 4 4 4 4 8 3 8 5 5 5 +

a	**819**	**b**	**1737**	**c**	**1221**	**d**	**876**
e	**1282**	**f**	**5252**	**g**	**18340**	**h**	**9837**

उपरोक्त सभी प्रश्नों में संख्या को दिमाग में रखा जाता है (*On the Flag*) बाद में उपर दर्शाये हुए तरीके से एक–एक अंक बनाते हुए उत्तर प्राप्त करें।

प्रचलित गणित में जहां प्रत्येक चीज लिखी जाती है वहीं मानसिक गणित स्पष्टतः स्मृति पर बहुत निर्भर करती है। बचपन में बच्चों की स्मृति बहुत अच्छी होती है और मानसिक गणित उसे और बढ़ाती है। (इसका मतलब यह है कि वैदिक गणित बड़े लोगों के लिए भी अच्छा है जिनकी स्मृति इतनी अच्छी न हो) । मानसिक गणित से हमारा आत्मविश्वास पैदा होता है और आत्मनिर्भरता की शिक्षा मिलती है क्योंकि बिना बाहरी मदद के जैसे पेपर, पेंसिल, केल्कुलेटर आदि से अधिकतर प्रश्न हल कर सकते हैं।

4.2 गुणा करना: बायें से दायें

7 मान लीजिए हमें इसे हल करना है:

$$\begin{array}{r} 2\ 3\ 7 \\ \underline{2} \times \\ \underline{\qquad} \end{array}$$

हम बायें से शुरू कर 237 के प्रत्येक अंक को 2 से गुणा करते हैं। हमें उत्तर मिले **4, 6, 14**
चूंकि 14 में दो अंक है एक को बायीं और के 6 में जोड़ दिया।
इसलिए 4, 6,14 = **474.**

उपरोक्त प्रश्न का उत्तर हम मानसिक तौर पर बायें से शुरू कर इस प्रकार निकालते हैं: पहले 4, तब 4, 6=46
तब 4, 6, 14 = 474.

8 **236 × 7 = 1652.**

$$\begin{array}{r} 2\ 3\ 6 \\ \underline{7} \times \end{array}$$

पहले अंक में गुणा करने पर 14
दूसरे अंक में गुणा करने के बाद 1 4, 2 1 = 161
तीसरे में गुणा करने के बाद 161, 4 2 = **1652.**

73 × 7 के लिए हमें मिला 4 9,2 1=**511.**
(क्योंकि 49+2 = 51)

9

अभ्यास -C नीचे दिये हुए बायें से दाहिने गुणा करें:

a 27 × 3 **b** 76 × 6 **c** 26 × 6 **d** 72 × 7 **e** 78 × 9 **f** 83 × 3

g 642 × 4 **h** 256 × 3 **i** 741 × 3 **j** 223 × 9

k 1059 × 7 **l** 8631 × 4 **m** 5432 × 8 **n** 4097 × 7

a	**81**	**b**	**456**	**c**	**156**	**d**	**504**	**e**	**702**	**f**	**249**
g	**2568**	**h**	**768**	**i**	**2223**	**j**	**2007**				
k	**7413**	**l**	**34524**	**m**	**43456**	**n**	**28679**				

बायें से दायेंगुणा करना आगे अध्याय 11 में और है।

4.3 दोगुना व आधा करना

कभी–कभी हम दोगुना व आधे को एक साथ उपयोग कर सकते हैं।

10 हल करें **35 × 22**.

दोगुना व आधा करने की विधि इस प्रश्न को और अधिक सरल बना सकती है।
हम 35 को दोगुना व 22 को आधा करते हैं जिससे हमें प्राप्त हुआ 70 × 11 और इसका उत्तर वही है जो 35 × 22 का
इसलिए **35 × 22** = 70 × 11 = **770**.

11 हल करें **35 × 64**.

दोगुना व आधा करने पर मिला70 × 32.
इसलिए हम *On the Flag* का उपयोग कर सकते हैं 32 × 7 निकालने के लिए, और अंत में 0 रख दें
इसलिए **35 × 64** = 70 × 32 = **2240**.

अभ्यास -D नीचे दिये गये का गुणा करें:

a 15 × 18	**b** 15 × 24	**c** 46 × 15
d 82 × 35	**e** 66 × 15	**f** 124 × 45
g 15 × 54	**h** 55 × 16	**i** 75 × 18
j 446 × 15	**k** 132 × 35	**l** 85 × 18
m $16 \times 4\frac{1}{2}$	**n** $24 \times 3\frac{1}{2}$	**o** £4.50 × 32

a 270	**b 360**	**c 690**
d 2870	**e 990**	**f 5580**
g 810	**h 880**	**i 1350**
j 6690	**k 4620**	**l 1530**
m 72	**n 84**	**o £144**

"जिन लोगों को सूत्र के उपयोग का व्यवहारिक ज्ञान है उन्हें इसके सिद्वान्त की ओर ध्यान देने की आवश्यकता नहीं है। वास्तविक काम किया जा सकता है। काफी समय बच जाता है। यह सिर्फ समय शक्ति और पैसे की बात नही है, मैं अनुभव करता हूँ कि यह बच्चों को उन आसुओं से बचाता है जो अक्सर गणित के अध्ययन करने में आते हैं।".

वैदिक मेटाफिजिक्स पेज नं. 170.

4.4 घटाना बायें से दायें

इस अनुभाग में हम बायें से दायेंघटाने का बहुत सरल तरीका बताते हैं जो सम्भवतया आपने पहले नहीं देखा।

12 हल करें **63 – 37**

आप बायें कॉलम को देखें और घटायें

$$\begin{array}{rcc} & 6 & 3 \\ - & 3 & 7 \\ \hline & & \\ \hline \end{array}$$

आपको 3 प्राप्त हुआ। लेकिन इसे नीचे लिखने के पहले आप अगले कॉलम में देखें
यह देखने पर कि 3 में से 7 को नहीं घटाया जा सकता इसलिए पहले कॉलम में 3 की बजाय 2 रखें, और दूसरा नीचे दर्शाये तरीके से रखें।

$$\begin{array}{rcc} & 6 & {}^{1}3 \\ - & 3 & 7 \\ \hline & 2 & \\ \hline \end{array}$$

तब अंतिम चरण केवल 13–7=6 है।
इसलिए 63–37=26

$$\begin{array}{rcc} & 6 & {}^{1}3 \\ - & 3 & 7 \\ \hline & 2 & 6 \\ \hline \end{array}$$

इस तरीके में हम बायें से शुरू कर, घटाते हैं, और इसे नीचे लिखते हैं अगर अगले कॉलम को घटाया जा सकता है तो इसे नीचे लिखते हैं। लेकिन अगर अगले कॉलम के अंकों को नहीं घटाया जा सकता है तो हांसिल 1 लेकर पहले अंक को 1 कम करके रखें और तब अगले कॉलम के अंकों को घटायें।

अभ्यास -E इन्हें कोशिश करें:

a $\begin{array}{rcc} & 6 & 2 \\ - & 4 & 7 \\ \hline \end{array}$ **b** $\begin{array}{rcc} & 7 & 5 \\ - & 2 & 8 \\ \hline \end{array}$ **c** $\begin{array}{rcc} & 5 & 1 \\ - & 1 & 5 \\ \hline \end{array}$ **d** $\begin{array}{rcc} & 6 & 7 \\ - & 3 & 8 \\ \hline \end{array}$

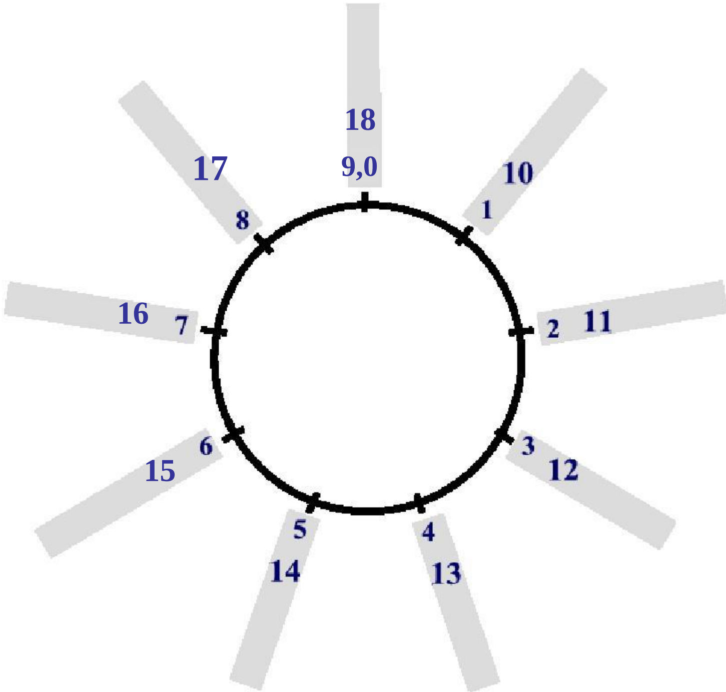
e $\begin{array}{rcc} & 4 & 6 \\ - & 2 & 5 \\ \hline \end{array}$ **f** $\begin{array}{rcc} & 6 & 5 \\ - & 3 & 7 \\ \hline \end{array}$ **g** $\begin{array}{rcc} & 9 & 0 \\ - & 6 & 2 \\ \hline \end{array}$ **h** $\begin{array}{rcc} & 8 & 2 \\ - & 3 & 8 \\ \hline \end{array}$

a 15 b 47 c 36 d 29
e 21 f 28 g 28 h 44

4.5 घटाने के प्रश्न को जाँचना

9 बिन्दू वृत्त को याद करें और अंक 9 को संख्या से, अंक जोड़ करते वक्त बाहर निकाल सकते हैं। इसका मतलब है कि **अंक जोड़ 9 और 0 एक ही है।**
आप नीचे दिये वृत्त में इन्हें एक साथ देखेंगे।
आप यह भी याद करेंगे कि कभी–कभी उन संख्या का उपयोग करना जो वृत्त के दूसरे घेरे पर हैं और अन्दर के घेरे की संख्या से 9 अधिक है, उपयोगी होता है।

वैकल्पिक रूप से हम वृत्त में पीछे (antyclockwise) की ओर गिनती कर सकते हैं। जैसे 3, 2, 1, 0.



13 **69 – 23** को हल करें व उत्तर को जाँचें।

69	6	उत्तर 46 है
– <u>23</u>	– <u>5</u>	69 और 23 का अंक जोड़ 6 और 5 है।
<u>46</u>	<u>1</u>	तब 6 – 5 = 1, जो कि 46 का भी अंक जोड़ है।
		उत्तर 46 की इसीलिए पुष्टि होती है।

ध्यान रहे कि हम अंक जोड़ को घटाते हैं क्योंकि यह घटाने का प्रश्न है।

14

74	2
– <u>58</u>	– <u>4</u>
<u>16</u>	<u>7</u>

यहाँ हमारे पास अंकजोड़ जाँच में 2 – 4 है इसलिए केवल 9 को उपर के अंक (2) में जोड़ें व फिर घटायें: 11 – 4 = 7, जो कि 16 का अंक जोड़ है। इसलिए उत्तर की पुष्टि होती है।

15

$$\begin{array}{r} 56 \\ -\ \underline{29} \\ \underline{27} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2 \\ -\ \underline{2} \\ \underline{0} \end{array}$$

इस उदाहरण में 56 और 29 दोनों का अंक जोड़ 2 है। और 2 – 2 = 0.
27 का अंक जोड़ 9 है लेकिन हमने पहले ही देखा है कि 9 और 0 अंक जोड़ के लिए एक ही है। इसलिए उत्तर की पुष्टि होती है।

अभ्यास -F अभ्यास E के उत्तर की अंक–जोड़ विधि से जाँच करें।

a	**8-2=6**	**b**	**3-1=2**	**c**	**6-6=9**	**d**	**4-2=2**
e	**1-7=3**	**f**	**2-1=1**	**g**	**9-8=1**	**h**	**1-2=8**

4.6 घटाने के और सवाल

इस घटाने की विधि को बड़ी संख्याओं को घटाने के लिए बढ़ाया जा सकता है।

16 हल करें **35567 – 11828.**

हम उपरोक्त सवाल को परम्परागत जैसा लिखें:
बायें से शुरू कर हम प्रत्येक कॉलम को घटायें।
3 – 1 = 2, लेकिन 2 लिखने के पहले हम जाँच करते हैं कि अगले कॉलम में उपर का अंक बड़ा है।

$$\begin{array}{r} 3\,5\,5\,6\,7 \\ -\ \underline{1\,1\,8\,2\,8} \\ \underline{\mathbf{2}\quad\quad\quad} \end{array}$$

इस प्रश्न में 5 बड़ा है 1 से, अतः हम 2 नीचे लिखते हैं।
अगले कॉलम में हमारे पास 5 – 1 = 4, हैं लेकिन तीसरे कॉलम को देखने पर पाया कि उपर का अंक नीचे के अंक से बड़ा नहीं है। (5 कम है 8 से) इसलिए नीचे 4 लिखने के बजाय हम 3 लिखते हैं। और इस अतिरिक्त 1 को दर्शाये तरीके (On the Flag) से लिखते हैं। जिससे 5, 15 बन जाता है।
इसलिए हमारे पास 15 – 8 = 7 है। अगले कॉलम को जाँचने पर हम 7 को नीचे ऐसा ही लिख सकते हैं क्योंकि 6 बड़ा है 2 से।

$$\begin{array}{r} 3\,5\,{}^{1}5\,6\,7 \\ -\ \underline{1\,1\,8\,2\,8} \\ \underline{\mathbf{2\,3}\quad\quad} \end{array}$$

चौथे कॉलम में आपके पास 6–2=4, लेकिन अगले कॉलम को देखने पर (7 छोटा है 8 से) 4 की बजाये 3 नीचे लिखते हैं और अतिरिक्त 1 को On flag 7 के साथ लिखते हैं जैसा कि दर्शाया गया है।

$$\begin{array}{r} 3\,5\,{}^{1}5\,6\,{}^{1}7 \\ -\ \underline{1\,1\,8\,2\,8} \\ \underline{\mathbf{2\,3\,7\,3}\ \ } \end{array}$$

अंत में 17 – 8 = **9**:

$$\begin{array}{r} 3\,5\,{}^{1}5\,6\,{}^{1}7 \\ -\ \underline{1\,1\,8\,2\,8} \\ \underline{\mathbf{2\,3\,7\,3\,9}} \end{array}$$

बायें से शुरू कर आप प्रत्येक कॉलम को घटाते हैं, लेकिन उत्तर को नीचे लिखने के पहले हम अगले कॉलम को देखें।
अगर अगले कॉलम में उपर का अंक बड़ा है तो पहले कॉलम के उत्तर को नीचे लिखें। लेकिन अगर उपर का अंक बड़ा नहीं है, तो प्राप्त अंक में से 1 घटा कर नीचे लिखें, और इस 1 को अगले कॉलम के छोटे अंक के उपर लिख दें।
अगर अंक एक समान हैं तो हम अगले कॉलम को देखें यह जानने के लिए कि कम करना है या नहीं।

अभ्यास -G नीचे दिये हुए को बायें से दायेंघटायें। (उत्तर की जाँच करें):

a 444	**b** 63	**c** 813	**d** 695
− 183	− 28	− 345	− 368
e 51	**f** 3456	**g** 7117	**h** 8008
− 38	− 281	− 1771	− 3839
i 6363	**j** 51015	**k** 14285	**l** 9630369
− 3388	− 27986	− 7148	− 3690963

a 261	**b 35**	**c 468**	**d 327**
e 13	**f 3175**	**g 5346**	**h 4169**
i 2975	**j 23029**	**k 7137**	**l 5939406**

बायें से दायें गणना करने के लाभ

बायें से दायें गणना करने के कई लाभ हैं जैसे हम बोलते और लिखते बायें ं से दाहिने हैं। कभी–कभी यह भी होता है कि हमें पहले के दो या तीन महत्वपूर्ण अंक ही चाहिए और हम किसी लम्बे प्रश्न को दाहिने से शुरू करते हैं तो हमारा बहुत समय व श्रम सभी अंक निकालने में बर्बाद होता है। भाग देने की प्रक्रिया हम बायें से करते हैं, अतः सभी गणना बायें से दायें की जा सकती है, इसका मतलब हम विभिन्न कार्य एक साथ कर सकते हैं । उदाहरण के तौर पर 2 वर्ग के जोड़ का वर्गमूल एक लाईन में निकालना (पुस्तिका 2 देखें)। वर्गमूल ट्रिगनॉमेट्री के कार्य आदि में कोई अंक दायीं और शुरू करने के लिए नहीं है, इसलिए बायें से शुरू करने के अलावा कोई विकल्प नहीं है। (पुस्तिका 3 देखें)

अध्याय 5

सभी 9 से और अंतिम 10 से

(ALL FROM 9 AND THE LAST FROM 10)

सारांश

5.1 सूत्र का प्रयोग करना

5.2 घटाना – संख्याओं को आधार से

5.3 मुद्रा – संख्याओं को आधार से घटाने का विशेष तरीका

5.1 सूत्र का उपयोग

''सभी 9 और अंतिम 10 से'' *(all from 9 and the last from 10)* बहुत उपयोगी सूत्र है जैसा कि हम देखेंगेः

1 अगर आप सूत्र *''सभी 9 और अंतिम 10 से''* *(all from 9 and the last from 10)* को 876 पर लगायें

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{8} & \mathbf{7} & \mathbf{6} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{4} \end{array}$$

आपको मिला **124**

क्योंकि आप 8 और 7 को 9 से और 6 को 10 से घटाते हैं

2

इसी तरह	3883,	64,	98,	6,	10905,
हो जाता है	**6117**,	**36**,	**02**,	**4**,	**89095**.

अभ्यास -A सूत्र *''सभी 9 और आखिरी 10 से''* को नीचे दिये गये पर लगायें

a 444	**b** 675	**c** 2468	**d** 18276
e 8998	**f** 9888	**g** 1020304	**h** 7

---

a 556	**b 325**	**c 7532**	**d 81724**
e 1002	**f 112**	**g 8979696**	**h 3**

3 सूत्र का उपयोग **470** या किसी भी ऐसी संख्या जिसके अंत में 0 हो करने पर हमें कुछ सावधानी बरतने की आवश्यकता है।.

0 को अनदेखा करें और 7 को अंतिम अंक मानकर सूत्र 47 पर लगायें और अंत में केवल 0 रखें। इसलिए आपको **530** मिला।

4 इसी तरह **28160** से **71840** आपको मिला (सूत्र केवल 2816 पर लगायें), **4073100** से आपको मिला **5926900** (केवल 40731 पर सूत्र लगाया).

अभ्यास -B इन संख्याओं पर सूत्र का उपयोग करें।

a 3570 **b** 920 **c** 1234560 **d** 3300

---

a 6430 b 80 c 8765440 d 6700

5.2 घटाना

अगर आप उदाहरण 2 की संख्या के जोड़ों को सावधानीपूर्वक देखें तो आप ध्यान दे सकते हैं कि प्रत्येक में दोनों संख्याओं का जोड़ आधार संख्या 10, 100, 1000 आदि हैं।

यह हमें **आधार संख्या** से घटाने का सरल तरीका देता है **जैसे 10, 100, 1000 . .**

सूत्र *''सभी 9 से और अंतिम 10 से''* संख्या को अगले उच्चतम आधार संख्या से घटाता है।

5

1000 – 864 = 136 सूत्र ''सभी 9 से और अंतिम 10 से'' को केवल 864 पर लगायें 9 से 8 घटाने पर **1** है, 9 से 6 घटाने पर **3** और 10 से 4 घटाने पर **6** है।

1000 – 307 = 693,

10000 – 6523 = 3477,

100 – 76 = 24,

1000 – 580 = 420. याद रखें सूत्र यहाँ केवल 58 को लगायें

यहाँ प्रत्येक स्थिति में संख्या को उसके आगे के उच्चतम आधार संख्या से घटाया जा रहा है।

अभ्यास -C नीचे दिये गये को घटायें:

a 1000 – 481	**b** 1000 – 309	**c** 1000 – 892	**d** 1000 – 976
e 100 – 78	**f** 100 – 33	**g** 10000 – 8877	**h** 10000 – 9876
i 1000 – 808	**j** 1000 – 710	**k** 10000 – 6300	

---

a 519	**b 691**	**c 108**	**d 24**
e 22	**f 67**	**g 1123**	**h 124**
i 192	**j 290**	**k 3700**	

शून्य लगाना

उपरोक्त सभी प्रश्नों में आपने ध्यान दिया होगा कि प्रथम अंक में शून्य की संख्या उतनी ही है जितने घटाई जाने वाली संख्या में अंक हैं।
उदाहरण के लिए 1000–481 तीन शून्य है और 481 में तीन अंक हैं।

6 माना कि आपको **1000 – 43**.

इसमें तीन शून्य, लेकिन 43 में सिर्फ 2 अंक ही हैं।

आप इसे इस तरह से लिख कर हल कर सकते हैं **1000 – 043 = 957**.

आप 43 के सामने एक शून्य रख कर सूत्र को 043 पर लगाते हैं।

7 **10000 – 58**.

यहाँ हमें 2 शून्य जोड़ने की आवश्यकता है। **10000 – 0058 = 9942**.

नीचे दिये गये उदाहरण में आपको शून्य लगाने की आवश्यकता होगी, लेकिन यह आप मानसिक स्तर पर कर सकते हैं।

अभ्यास -D नीचे दिये गये को घटायें :

a 1000 – 86	**b** 1000 – 93	**c** 1000 – 35	**d** 10000 – 678
e 10000 – 353	**f** 10000 – 177	**g** 10000 – 62	**h** 10000 – 85
i 1000 – 8	**j** 10000 – 3		

a	**914**	**b**	**907**	**c**	**965**	**d**	**9322**
e	**9647**	**f**	**9823**	**g**	**9938**	**h**	**9915**
i	**992**	**j**	**9997**				

एक कम

8 अब इसे देखें **600 – 77.**

आपके पास 100 की बजाय 600 है।
वास्तव में 77 उन छः 100 के एक 100 से बाहर निकलेगा अतः 500 बचेगें।

इसलिए **600 – 77 = 523**
6 को 1 से कम करने पर 5, और *''सभी 9 से......''* सूत्र का उपयोग 77 पर किया जिससे 23 मिला।

9 **5000 – 123 = 4877.** 5 से 1 कम करने से 4,
और सूत्र ने 123 को 877 में बदला

अभ्यास E इन्हें कोशिश करें:

a 600 – 88 **b** 400 – 83 **c** 900 – 73 **d** 6000 – 762

e 2000 – 979 **f** 50000 – 4334 **g** 70000 – 8012

a	**512**	**b**	**317**	**c**	**827**	**d**	**5238**
e	**1021**	**f**	**45666**	**g**	**61988**		

एक अधिक

अब एक दूसरे अंतर को देखें।

10 हल करें **8000 – 4222.**

पहले 1000 पर विचार करें 8 में से 5 कम होंगे (4 से 1 अधिक)
क्यों कि आप 4000 बाहर निकाल रहें हैं।
सभी को ''9 से......'' सूत्र उपयोग करने पर 222 से हमें 778 मिला

इसलिए **8000 – 4222 = 3778.**

जब आपके पास इस तरह का 8000 – 4222 का सवाल हो जहां दोनो संख्या में अंक एक समान हो।

> पहला उत्तर पाने के लिए पहली संख्या के पहले अंक से, दूसरी संख्या के पहले अंक से 1 अधिक घटायें और बचे हुए अंकों के लिए सूत्र का उपयोग करें।

अभ्यास -F नीचे दिये हुए को घटायें

a 8000 – 3504	**b** 5000 – 1234	**c** 300 – 132
d 2000 – 1444	**e** 700 – 232	**f** 60,000 – 23,331

---

a	**4496**	**b**	**3766**	**c**	**168**
d	**556**	**e**	**468**	**f**	**36,669**

फिर एक कम

11 हल करें **6000 – 32.**

यहाँ आप देखेंगे कि आपको 2 अंकों की संख्या को 6000 में से घटाना है जिसमें 3 शून्य हैं।
सवाल को इस तरह से लिख सकते हैं 6000 – 032
तब **6000 – 032 = 5968**.
6 को कम कर 5 किया और सूत्र से 032 को 968 में बदल दिया। .

12 **30000 – 63** = 30000 – 0063 = **29937**.
3 का 2 हो जाता है और 0063 बन जाता है 9937.

अभ्यास -G नीचे दिये गये को घटायें

a 5000 – 74	**b** 8000 – 58	**c** 6000 – 94	**d** 4000 – 19
e 80000 – 345	**f** 30000 – 276	**g** 50000 – 44	**h** 700 – 8
i 30000 – 54	**j** 20000 – 222	**k** 30000 – 670	**l** 70000 – 99

---

a	**4926**	**b**	**7942**	**c**	**5906**	**d**	**3981**
e	**79655**	**f**	**29724**	**g**	**49956**	**h**	**692**
i	**29946**	**j**	**19778**	**k**	**29330**	**l**	**69901**

5.3 मुद्रा

जिस तरह के सवाल हम कर रहें हैं ये बची हुई राशि (मुद्रा) निकालने के लिए बहुत उपयोगी है।

13 मानें कि आप कम्प्यूटर का खेल खरीदते हैं जिसकी कीमत **£7.53** है और आप दूकानदार को **£10** का नोट देते हैं। आप दूकानदार से बाकी कितने की उम्मीद करेंगे?

आप सिर्फ सूत्र *''सभी 9 से व अंतिम 10 से''* को 7.53 पर लगायें जिससे **£2.47** हुआ।

14 अगर **£3.46** के भुगतान के लिए आप **£20** का नोट देते हैं तो कितना वापिस मिलने की उम्मीद है?

आप वापस **£16.54** की उम्मीद करेंगे क्योंकि £10 में से £3.46 निकालने पर £6.54 हुवा और £10 इसमें और जोड़ेगे।

अभ्यास -H नीचे दिये हुए प्रश्नों के लिए मुद्रा घटाने को इस तरह करें.

a £10 – £2.34	**b** £10 – £6.51	**c** £10 – £5.82	**d** £10 – £9.07
e £20 – £7.44	**f** £20 – £12.78	**g** £20 – £3.18	**h** £20 – £8.40

a £7.66 b £3.49 c £4.18 d £0.93
e £12.56 f £7.22 g £16.82 h £11.60

यह घटाने की विधि हमें सामान्य घटाने के तरीके की ओर ले जाती है।(अध्याय 9 देखें)

अंतिम अभ्यास अभी तक जो किया है उनका मिश्रण है।

अभ्यास -I घटायें:

a 100 – 34	**b** 1000 – 474	**c** 5000 – 542	**d** 800 – 72
e 1000 – 33	**f** 5000 – 84	**g** 700 – 58	**h** 9000 – 186
i 10000 – 4321	**j** 200 – 94	**k** 10000 – 358	**l** 400 – 81
m 7000 – 88	**n** 900 – 17	**o** 30000 – 63	**p** 90000 – 899

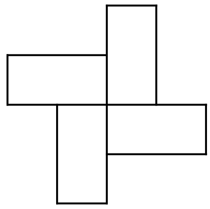
a 66 b 526 c 4458 d 728
e 967 f 4916 g 642 h 8814
i 5679 j 106 k 9642 l 319
m 6912 n 883 o 29937 p 89101

अध्याय 6
संख्या विभाजन

सारांश

6.1 जोड़
6.2 घटाना
6.3 गुणा करना
6.4 भाग देना

कठिन प्रश्न को विभाजित कर सरल बनाना, सभी बांये से दायें करना।



6.1 जोड़

कठिन प्रश्नों को 2 या अधिक में विभाजित कर सरल बनाना एक बहुत ही उपयोगी विधि है जो सूत्र *''विलोपन एवम् स्थापना द्वारा''* (*By Alternate Elimination and Retention)* के अन्तर्गत आती है। मानसिक तौर पर जल्दी सवाल हल करने के लिए विभाजन विधि का उपयोग करने से बहुत सारी गणना का काम बच जाता है।

1 मानें कि आपको जोड़ का सवाल दिया है

$$\begin{array}{r} 2\ 3\ 4\ 5 \\ 6\ 7\ 3\ 8 + \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

4 अंकों की संख्या के साथ यह कठिन लगता है।
लेकिन अगर आप इसे दो भागों में विभाजित करें तो प्रत्येक भाग सरलता से व मानसिक तौर पर किया जा सकता है।

$$\begin{array}{r|l} 2\,3 & 4\,5 \\ 6\,7 & 3\,8\ + \\ \hline 9\,0 & 8\,3 \\ \hline \end{array}$$

(अध्याय 1.5, 1.6, 4.1 देखें):

दाहिने ओर 45 + 38 है जो (मानसिक स्तर पर) **83** है।
इसलिए इसे नीचे रखें।
और बांयी तरफ 23 + 67 जो कि 90 है। अतः **2345 + 6738 = 9083.**

अभ्यास -A नीचे दिये हुए को जोड़ें। (इनमें से कुछ को मानसिक स्तर पर कोशिश करें)

a 3 4 5 6
4 7 1 7

b 1 8 1 9
1 7 1 6

c 6 4 4 6
2 8 3 8

d 8 3 2 1
1 8 2 3

a 81/73 **b 35/35** **c 92/84** **d 101/44**

2 हल करें **481 + 363**.

$$\begin{array}{r|rr} 4 & 8 & 1 \\ +3 & 6 & 3 \\ \hline 8 & 4 & 4 \\ 1 & & \end{array} \qquad \begin{array}{rr|r} 4 & 8 & 1 \\ +3 & 6 & 3 \\ \hline 8 & 4 & 4 \end{array}$$

यह सवाल दो तरीके से किया है।
कौनसा सरल है?

आप यह सोच सकते है कि लाईन कहां रखना,
लेकिन अच्छा यह होता है कि हम ऐसी जगह रखें जहां हांसिल न हो।

अभ्यास -A क्रमशः इन्हें जोड़ें (कुछ को मानसिक स्तर पर करें):

E 767 616	**f** 383 384	**g** 444 246	**h** 888 707
I 551 662	**j** 4554 3636	**k** 1234 4944	**l** 5234 9393

E 13/83 **f** 76/7 **g** 6/90 **h** 15/95
I 121/3 **j** 81/90 **k** 61/78 **l** 14/62/7

6.2 घटाना

अब संख्या विभाजन विधि घटाने के सवाल में भी उपयोग कर सकते हैं।

3 घटाने के सवाल पर विचार करें।

$$\begin{array}{r} 5454 \\ -\ 1726 \\ \hline \end{array}$$

आप इसे 2 सरल सवाल में विभाजित कर सकते है।

$$\begin{array}{r|rrr} 5 & 4 & 5 & 4 \\ -1 & 7 & 2 & 6 \\ \hline 3 & 7 & 2 & 8 \end{array}$$

पहले 54 – 26, जो 28 है
बाद में 54 –17,जो 37 है

अभ्यास -B इन्हें घटायें – सवाल को दो सरल में विभाजित करें।

a 3 2 4 3 1 3 1 9	**b** 4 4 4 4 1 8 2 8	**c** 7 0 7 0 1 5 2 6	**d** 3 7 2 1 1 9 0 9
e 6 8 8 9 1 9 3 6	**f** 8 5 2 1 3 9	**g** 7 7 7 5 8 5	**h** 6 6 6 6 2 9 3 8

a 19/24	**b 26/16**	**c 55/44**	**d 18/12**
e 49/53	**f 7/13**	**g 19/2**	**h 37/28**

6.3 गुणा करना

वही विभाजन विधि गुणा करने व भाग देने में भी लगाई जा सकती है।

4 **352 × 2**

आप इसे इस तरह से विभाजित कर सकते हैं: 35 / 2 × 2 = **704**. (35 और 2 को, दोगुना करना सरल है।)

5 इसी तरह **827 × 2** हो जाता है 8 / 27 × 2 =**1654**,

604 × 7 होता है 6 / 04 × 7 = **4228**,

121745 × 2 होता है 12 / 17 / 45 × 2 = **243490**,

3131 × 5 होता है 3 / 13 / 1 × 5 = **15655.**

आप जैसा चाहें संख्या को विभाजित कर सकते हैं। लेकिन सबसे अच्छा है कि:

> संख्या को इस तरह से विभाजित करें कि प्रत्येक भाग का सरलता से गुणा किया जा सके बिना हांसिल के।

अभ्यास -C नीचे दिये गये का गुणा करें:

a 432 × 3	**b** 453 × 2	**C** 626 × 2	**d** 433 × 3	**e** 308 × 6
F 814 × 4	**g** 515 × 5	**h** 919 × 3	**i** 1416 × 4	**j** 2728 × 2
k 3193 × 3	**l** 131415 × 3			

a	**12/96**	**b**	**90/6**	**c**	**12/52**	**d**	**12/99**	**e**	**18/48**
F	**32/56**	**g**	**25/75**	**h**	**27/57**	**i**	**56/64**	**j**	**54/56**
k	**9/57/9**	**l**	**39/42/45**						

6.4 भाग देना

भाग देने की प्रक्रिया को भी अक्सर इस तरीके से सरल किया जा सकता है।

6 भाग का सवाल **2)4 3 2** इसको विभाजित किया जा सकता है: 2)4 / 32 = 2/16 = **216**.

क्योंकि 4 और 32 दोनों को आधा करना सरल है।

7 इसी तरह **2)3 4 5 6** होता है 2)34 / 56 = 17/28 = **1728**.

8 और **3)1266** में हम ध्यान देने पर पाते हैं कि 12 और 66 को अलग से 3 का भाग दिया जा सकता है, इसलिए

3)12/66 = 4/22 = **422**

अभ्यास-D इन्हें मानसिक स्तर पर भाग दें:

a 2)6 5 6 **b** 2)7 2 6 **c** 3)1 8 9 9 **d** 6)1 2 6 6

e 4)2 0 4 8 **f** 4)2 8 4 4 **g** 3)2 1 3 9 **h** 2)2 6 3 6

a	**3/28**	**b**	**36/3**	**c**	**6/33**	**d**	**2/11**
E	**5/12**	**f**	**7/11**	**g**	**7/13**	**h**	**13/18**

कभी–कभी हमें थोड़ा सा ध्यान देना होता है और अतिरिक्त शून्य रखना होती है।

9 **6)6 1 2** होता है 6)6 / 12 = 1/02 = **102**.
यहाँ शून्य का ध्यान रहे क्योंकि 12 दो अंक की जगह लेता है।

10 **7)2 8 4 9** होता है 7)28 / 49 = 4/07 = **407**.

अभ्यास -D क्रमशः

i 4)2 8 1 6 **j** 4)8 1 2 **k** 6)4 8 1 8 **l** 3)1 2 6 6

m 5)2 0 4 5 **n** 2)3 8 1 4 **o** 7)21014

I	**704**	**j**	**203**	**k**	**803**	**l**	**422**
m	**409**	**n**	**1907**	**o**	**3002**		

और कभी–कभी हम तीन भागों में विभाजित करते हैं।

11 **3) 2 4 4 5 3** होता है 3)24 / 45 / 3 = 8/15/1 = **8151**.

अभ्यास -D क्रमशः

p 3)9 1 8 2 7 **q** 2)3 8 7 2 5 2 **r** 8)4 0 1 6 8 **s** 5)1 0 3 5 4 5

T 3)1 5 0 1 5 **u** 13)3 9 1 3 5 2

p	**30609**	**q**	**193626**	**r**	**5021**	**s**	**20709**
T	**5005**	**u**	**30104**				

"परंतु वैदिक पद्वति में 5 से उपर वाले पहाड़े की आवश्यकता ही नहीं पड़ती है"
"वैदिक गणित से", Page 11.

अध्याय 7

आधार गुणन

सारांश

7.1 **पहाड़े (Times Table)** – 5 × 5 से उपर की गुणन तालिका से बचना
7.2 **संख्याऐं जो 10 से कुछ ज्यादा हों**–दस के निकट व उसके उपर की संख्याओं को गुणा करना
7.3 **गुणनतालिका का स्वरूप** – 9 बिन्दु वृत्त पर तालिका (Table) का स्वरूप
7.4 **100 के पास की संख्याऐं** – 100 के पास की संख्याओं को गुणा करना
7.5 **बड़ी संख्याऐं** – बड़ी संख्याओं का गुणा करना
7.6 **अनुपात से** – तरीके को और आगे बढ़ाना
7.7 **दूसरे आधार के पास की संख्याओं का गुणा करना**
7.8 **आधार के पास की संख्याओं का वर्गफल निकालना**
7.9 **सारांश**–अभी तक के गुणा करने के तरीकों का

7.1 पहाड़े (Times Table)

पहाड़े अच्छी तरह याद होना बहुत उपयोगी है। अगर याद नहीं है तो यहाँ उपयोग के लिए साफ और सरल तरीका है।

1 अगर आप **7 × 8** चाहते हैं और यह भी आप जानते हैं कि सात, 10 से तीन कम है और आठ, 10 से 2 कम है।

इसलिए 7 के सामने –3 रखें $\quad 7 - 3$

और 8 के सामने –2 इस तरह रखें $\quad \times\ \underline{8 - 2}$

तब पहला बाई तरफ का उत्तर पाने के लिए तिरछा घटायें 7 – 2 = 5:

$$\begin{array}{r} 7 - 3 \\ \times\ \underline{8 - 2} \\ \underline{5} \end{array}$$

या अगर आप चाहें तो दूसरे तरीके से भी घटा सकते हैं:

$$\begin{array}{r} 7 - 3 \\ \times\ \underline{8\ \ 2} \\ \underline{5} \end{array}$$

8 – 3 = 5 इस तरह

अंत में सिर्फ 3 और 2 को खड़े गुणा करें जिससे 6 मिला जो उत्तर का दूसरा भाग है।

$$\begin{array}{rr} 7 & -3 \\ \times 8 & -2 \\ \hline 5 & 6 \\ \hline \end{array}$$

इसलिए **7 × 8 = 56**.

इसलिए संक्षेप में 1) अंकों के 10 से अंतर को लिखें: 3 और 2 जैसा उपर दर्शाया है,
2) तिरछा घटायें: 7–2 = 5 और 8–3 = 5 और इसे नीचे रखें,
3) खड़े गुणा करें: 3×2 = 6 और इसे नीचे रखें।

यह सूत्र *''सीधे (खड़े) और तिरछे''* *(Vertically & crosswise)* के अन्तर्गत आता है।

कभी–कभी हांसिल आ सकता है उसे आगे देखें।

2 **6 × 7** को हल करने में हम ध्यान दें 6, 10 से 4 कम है और सात, 10 से 3 कम है

इसलिए

$$\begin{array}{r} 6_{-}4 \\ \times\ \underline{7_{-}3} \\ \hline \end{array}$$

तब तिरछा घटायें: 6 – 3 = 3 और इसे नीचे रखें:

$$\begin{array}{l} \ \ 6_{-}4 \\ \times\ \underline{7_{-}3} \\ \ \ \underline{3} \end{array}$$

फिर सिर्फ 4 × 3 का गुणा करने पर 12 दूसरे भाग का उत्तर हुआ।
लेकिन यहाँ, चूंकि 12 दो अंकों की संख्या है आप 1 हांसिल को बांई ओर 3 में जोड़ें।

$$\begin{array}{l} \ \ 6_{-}4 \\ \times\ \underline{7_{-}3} \\ \ \ \underline{3}\ {}_{1}\ \underline{2} = 42 \end{array}$$

इसलिए **6 × 7 = 42.**

अभ्यास -A यह तरीका बहुत सरल है नीचे दिये गये को कोशिश करें:

a 7×9	**b** 8×8	**c** 9×6	**d** 7×7	**e** 8×9
F 8×6	**g** 9×9	**h** 6×6	**i** 7×5	**j** 6×5

a 63 b 64 c 54 d 49 e 72
F 48 g 81 h 36 i 35 j 30

इसलिए वैदिक गणित में गुणन तालिका (Multipication Table) 9×9 के उपर आवश्यक नहीं है।

पृष्ठ 69 पर Russian Peasant गुणन देखें।

7.2 संख्यायें 10 से थोड़ी उपर

पिछले अध्याय में जो तरीका 10 से थोड़ा नीचे के अंकों के गुणा करने के लिए किया था उसे ही 10 से थोड़ा उपर की संख्याओं के गुणा करने के लिए भी उपयोग किया जा सकता है।

मानें कि आप 12 और 13 का गुणा करना चाहते है जो दोनों 10 के निकट है।

3 **12 × 13** के लिए आप ध्यान दें संख्यायें 10 के निकट है और 12, दस से 2 अधिक है और 13, दस से 3 अधिक है।

इसलिए सवाल को पहले जैसा लिखें सिर्फ घटाने के निशान के बजाये जोड़ने के निशान के साथ, क्योंकि अब संख्या 10 से अधिक है:

$$\begin{array}{rr} & 12 + 2 \\ \times & \underline{13} \; \underline{+ 3} \end{array}$$

तब आप **तिरछा जोड़ें**
पहले भाग का उत्तर पाने के लिए:
12 + 3 = 15 (or 13 + 2 = 15).

$$\begin{array}{rrr} & 12 & + 2 \\ \times & \underline{13} & \underline{+ 3} \\ & \underline{15} & \underline{} \end{array}$$

और पहले की तरह खड़े गुणा करें
अंतिम संख्या प्राप्त करने के लिए: 2 × 3 = 6

$$\begin{array}{rrr} & 12 & + 2 \\ \times & \underline{13} & \underline{+ 3} \\ & \underline{15} & \underline{6} \end{array}$$

इस लिए **12 × 13 = 156**.

अभ्यास -B यह पहले जेसा ही है। सिर्फ इस अंतर के कि अब जोड़ते हैं। कुछ सवाल कोशिश करें।
दूसरी लाईन के सवाल में हांसिल (Carry) है

a 13 × 11	**b** 12 × 12	**c** 11 × 15	**d** 13 × 13	**e** 11 × 11
F 13 × 14	**g** 12 × 16	**h** 14 × 14	**i** 16 × 16	**j** 13 × 18

---

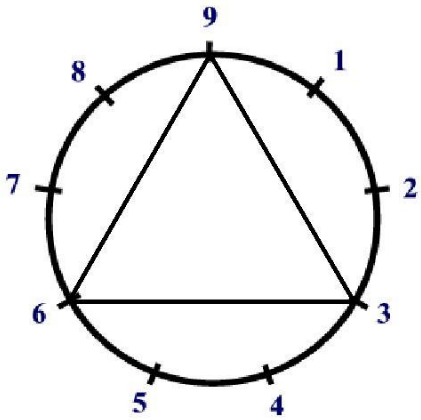
a	**143**	**b**	**144**	**c**	**165**	**d**	**169**	**e**	**121**
F	**182**	**g**	**192**	**h**	**196**	**i**	**256**	**j**	**234**

7.3 गुणन तालिका (Tables) का स्वरूप

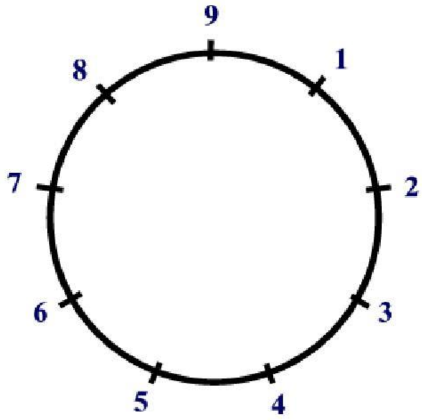
3 का पहाड़ा इस प्रकार है : 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30 . . .
अगर हम इनका अंक जोड़ करें हम पाते हैं 3, 6, 9, 3, 6, 9, 3, 6, 9 . . .

यही स्वरूप 3, 6, 9 बार–बार दोहराता जाता है।
हम इस स्वरूप को 9 बिन्दु वृत्त पर दर्शा सकते हैं।

3 का पहाड़ा (TABLE)



6 का पहाड़ा (TABLE)



4 3 से शुरू करके एक लाईन 6 तक खींचें (रेखा रंगीन खींचे)
तब 6 से एक लाईन अगले अंक 9 तक खींचें
तब 9 से एक लाईन अगले अंक 3 तक खींचे

यहाँ से फिर आकार ऐसे ही बढ़ता जाता है क्योंकि 3, 6, 9, 3, 6, 9 . . . दोहराते जाते हैं।

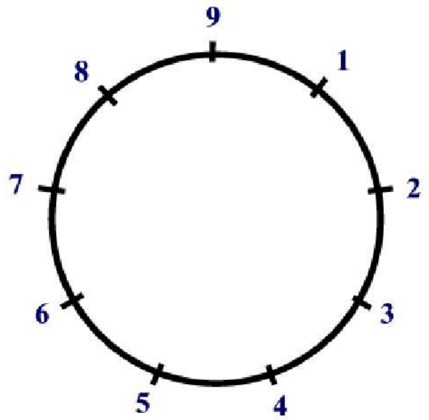
अतः ऊपर दर्शाया हुआ स्वरूप 3 के पहाड़े का है।

अभ्यास -C

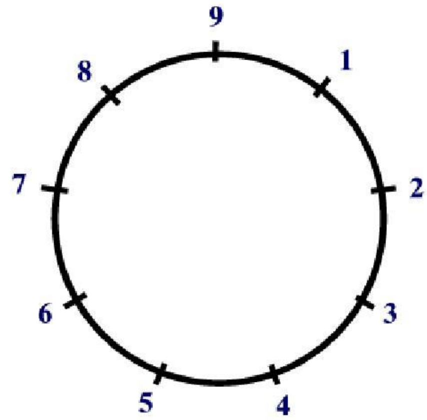
a उपर बायें ओर दिये गये वृत्त पर 6 के पहाड़े के लिए स्वरूप खींचे।

b नीचे दिये गये वृत्त पर 4 और 5, 1 और 8, 2 और 7 और 9 के पहाड़ों का स्वरूप खींचे।

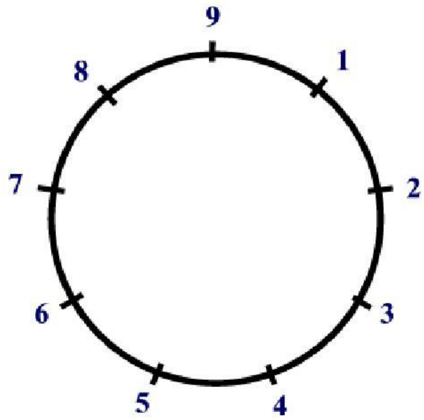
4 का पहाड़ा



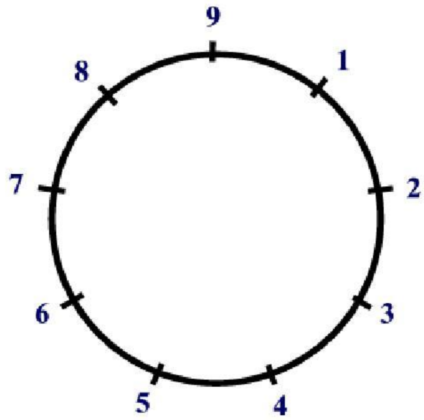
5 का पहाड़ा



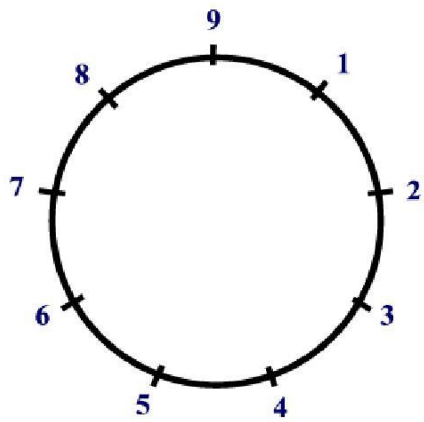
1 से 10 तक की गिनती



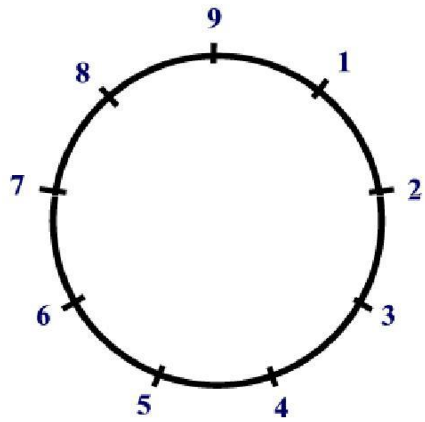
8 का पहाड़ा



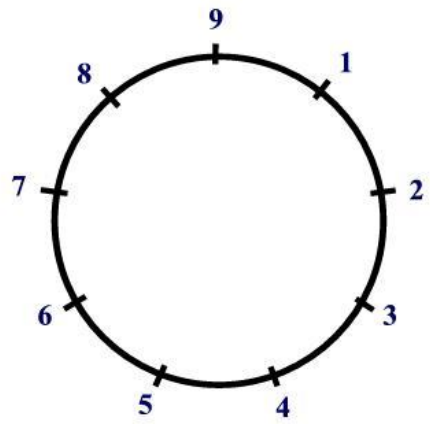
2 का पहाड़ा



7 का पहाड़ा



9 का पहाड़ा

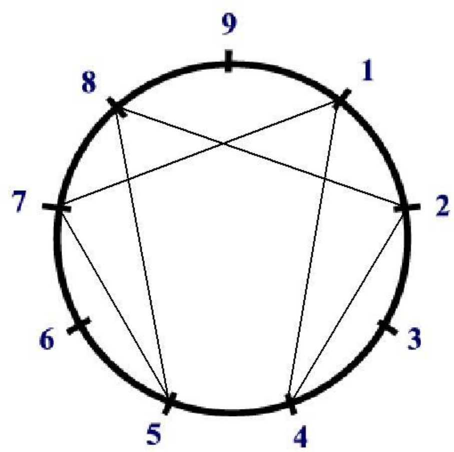


आवर्ती दशमलव

इस 9 बिन्दु वृत्त के कई उपयोग हैं, आवर्ती दशमलव को वृत्त पर दर्शाने के अलावा (देखें मार्ग दर्शिका 2 या कॉस्मिक केल्कुलेटर बुक 2 और 3)

उदाहरण के लिए : $\frac{1}{7} = 0.\dot{1}4285\dot{7}$

इसका मतलब है कि क्रम 142857 अनिश्चित काल के लिए दोहराता जाता है।
हम इस स्वरूप को खींचे, 1 से शुरू कर एक लाईन 4 तक खींचे और क्रमशः जब तक 6 लाईन होती है और फिर लाईन खुद दोहराने लगती है। यह अंकगणित स्वरूप को ज्यामिति स्वरूप में परिवर्तित करता है।



वास्तव में कोई भी अनुक्रम को वृत्त पर दर्शाया जा सकता है: वर्ग संख्या, Triangular Number, prime numbers, the Fibonacci sequence etc.

7.4 100 के पास की संख्यायें

7× 8 के तरह के अंकों को गुणा करने का जो सरल तरीका अध्याय 7.1 में बताया गया है उसे बड़ी संख्याओं को सरलता से गुणा करने के लिए भी बढ़ाया जा सकता है।

अधिकतर **88 × 98** के जैसे सवाल को कठिन समझा जाता है क्योंकि इसमें 8 और 9 बड़े अंक हैं।

लेकिन संख्या 88 और 98 दोनों आधार 100 के निकट है। वास्तव में इसको गुणा करना बहुत सरल है।

5 **88 × 98 = 8624.**
हम सवाल को नीचे दिये गये ढंग से लिखते हैं:
88, 100 से 12 कम है, इसलिए हम –12 को 88 के सामने रखें।
98, 100 से 2 कम है। इसलिए हम –2 को 98 के सामने रखें ।
उत्तर 8624 दो भाग में है। 86 और 24

88 – 12
<u>98 – 2</u>
<u>86 / 24</u>

तिरछा घटायें — खड़े गुणा करें: 12 × 2 = 24

यह है 88 – 2 = 86 और 98 – 12 = 86
(जो भी आपको ठीक लगे),

12 और 2 को हम कमी (**deficiencies**) कहते हैं क्योंकि 88 और 98 100 से 12 और 2 कम हैं।

6 **93 × 96** के लिए कमी 7 और 4 है इसलिए

93 - 07
<u>96 - 04</u>
<u>89 / 28</u>

93 – 4 = 89 or 96 – 7 = 89,
और 7 × 4 = 28.

7 **98 × 97**के लिए:

98 – 02
<u>97 – 3</u>
<u>95 / 06</u>

यहाँ जो शून्य बीच में लगाया है उस पर ध्यान दें, संख्यायें जिनका गुणा किया जा रहा है वे 100 के पास है इसलिए दायेंतरफ 2 अंक चाहिए, जैसे, दूसरे उदाहरणों में:

वास्तव में एक बार हम कमी(Deficiencies) प्राप्त कर लेते हैं हम सूत्र *''खड़े और तिरछे''* *(Vertically & crosswise)* की विधि को लगाते हैं:
हम बायें भाग का उत्तर प्राप्त करने के लिए **तिरछा घटाते** हैं और दायेंभाग का उत्तर प्राप्त करने के लिए दायेंकॉलम को **खड़े गुणा** करते हैं।

अभ्यास -D नीचे लिखें को गुणा करें:

a 94 × 94	**b** 97 × 89	**c** 87 × 99	**d** 87 × 98	**e** 87 × 95
F 95 × 95	**g** 79 × 96	**h** 98 × 96	**i** 92 × 99	**j** 99 × 99

a	**88/36**	**b**	**86/33**	**c**	**86/13**	**d**	**85/26**	**e**	**82/65**
F	**90/25**	**g**	**75/84**	**h**	**94/08**	**i**	**91/08**	**j**	**9801**

यह हो सकता है कि दायीं ओर की संख्या गुणा करने पर हमें हांसिल बायीं ओर ले जाना पड़े जैसा कि:

8 89 × 89 के लिए:

$$\begin{array}{l} 89 - 11 \\ \underline{89 - 11} \\ \underline{78 / {}_1 21} = \underline{\mathbf{7921}} \end{array}$$

यहाँ प्रत्येक संख्या 100 से 11 कम है। और 11 × 11 = 121, जो एक 3 अंक की संख्या है। इसलिए इसके सैकड़े के अंक को हम बायीं ओर ले जाते हैं।

अभ्यास -D क्रमशः

k 88 × 88	**l** 97 × 56	**m** 44× 98	**n** 97 × 63

k	**7744**	**l**	**5432**	**m**	**4312**	**n**	**6111**

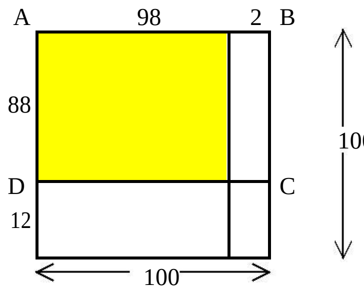
स्पष्टीकरण (उपर दिये गये उदाहरण 5 के आधार पर)

(1)

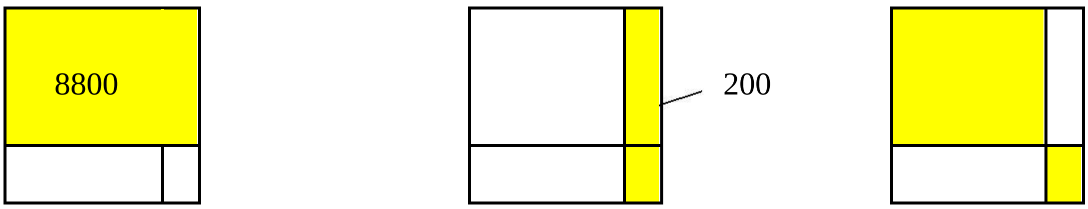
$$\begin{aligned} 88 \times 98 &= 88 \times 100 - 88 \times 2 \\ &= 8800 - (100 \times 2 - 12 \times 2) \\ &= 8800 - 200 + 12 \times 2 \\ &= 8600 + 24 = 8624 \end{aligned}$$

(2) वैकल्पिक तौर पर नीचे दिये गये ज्यामितिय स्पष्टीकरण को देखें।

88×98 एक आयत का क्षेत्रफल है जिसकी लंबाई 88 इकाई व चोड़ाई 98 इकाई है। इसलिए एक वर्ग जिसकी एक भुजा 100 से शुरू करते हैं:



आप चित्र में अपेक्षित क्षेत्र छायांकित देख सकते हैं।
आप 100 से कमी को देख सकते हैं: 12 और 2
अब क्षेत्रफल ABCD 8800 होना चाहिए क्योंकि आधार 100 और उंचाई 88 है।



इसमें से हम दायेंभाग की पट्टी को घटायें जिसका क्षेत्रफल 200 है:
इसलिए 8800 – 200 = 8600.
इससे चाहा गया क्षेत्रफल बच जाता है, लेकिन हमने दाहिने ओर के छोटे छायांकित आयात को भी घटा दिया है। इसलिए इसे फिर जोड़ना चाहिए और चूंकि इसका क्षेत्रफल 12×2=24 है हम 24 को 8600 में जोड़ते हैं तो 8624 आता है

आप सम्भवतः देखेंगे कि यह तरीका किसी भी गुणनफल में कार्य करेगा जब संख्या 100 के निकट व कुछ कम हो।

(3) बीज गणितिय प्रमाण होगा: $(x – a)(x – b) = x(x – a – b) + ab$,
यहाँ x आधार है (इस उदाहरण में 100) और a और b आधार से संख्याओं की कमी (Deficiencies) (इस प्रकरण में 12 और 2)
संख्यायें जिनका गुणा किया जा रहा है $(x – a)$ और $(x – b)$ है; $(x – a – b)$ में एक संख्या $(x – a)$ व दूसरी संख्या b (कमी) और दाहिने तरफ के कोष्ठक के बाहर 'x' का असर परिणाम $(x – a – b)$ को उतने स्थान बायें ले जाना जितने आधार में शून्य है।

मानसिक स्तर पर

इस अनुभाग में पहले उदाहरण को देखे:

88 – 12
<u>98 – 2</u>
<u>86 / 24</u>

सबसे कारगर तरीका इस प्रश्न को हल करने का यह है कि एक संख्या लें और दूसरी संख्या की कमी को इससे घटायें: 88–2=86, or 98–12=86.
तब दोनों कमी को आपस में गुणा करें: 12×2=24.
हम उत्तर के पहले भाग को मानसिक स्तर पर समायोजित करें, अगर यहाँ हांसिल है।

यह बहुत सरल है, वास्तव में यह केवल मानसिक अंकगणित है।

अभ्यास -E संख्याओं को मानसिक स्तर पर गुणा करें केवल उत्तर लिखें:

a 87 × 97	**b** 79 × 98	**c** 98 × 93	**d** 94 × 95
e 96 × 96	**f** 88 × 96	**g** 89 × 98	**h** 93 × 96
i 93 × 99	**j** 97 × 97	**k** 96 × 67	**l** 95 × 75

m 8 9

? ?

8 2 7 7 छूटी हुई संख्या ढूंढे।

---

a	**84/39**	**b**	**77/42**	**c**	**91/14**	**d**	**89/30**
E	**92/16**	**f**	**84/48**	**g**	**87/22**	**h**	**89/28**
I	**92/07**	**j**	**94/09**	**k**	**64/32**	**l**	**71/25**
m	**93**						

संख्या 100 से उपर

उन संख्याओं को जो 100 से उपर है को गुणा करना और भी सरल है बजाय संख्या जो 100 से कम है।

माने कि हमें 103 × 104 चाहिए।

9 **103 × 104 = 10712.**

103+ 03
104+ 4
107/ 12

तरीका पहले जैसा ही है। 103, 3

103 अधिक है 100 से इसलिए संख्या के आगे +3 रखें।

और 104, 4 अधिक है 100 से इसलिए संख्या के आगे +4 रखें।

तब 103 + 4 = **107** और 104 + 3 = **107**,

और 4 × 3 = **12**.

इसलिए अब हम **तिरछा जोड़ते** हैं और खड़े गुणा करते हैं।

अभ्यास -F मानसिक स्तर पर गुणा करें:

a	107 × 104	**b**	107 × 108	**c**	133 × 103	**d**	102 × 104
e	123 × 102	**f**	171 × 101	**g**	103 × 111	**h**	125 × 105
I	103 × 103	**j**	111 × 111	**k**	162 × 102	**l**	113 × 105

m 1 0 3
? ? ?
1 0 8 1 5 छूटी हुई संख्यायें ढूंढे ।

a	**11128**	**b**	**11556**	**c**	**13699**	**d**	**10608**
E	**12546**	**f**	**17271**	**g**	**11433**	**h**	**13125**
I	**10609**	**j**	**12321**	**k**	**16524**	**l**	**11865**
m	**105**						

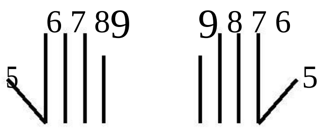
मानसिक गणित

वैदिक तकनिकी इतनी सरल है कि वैदिक गणित की प्रणाली वास्तव में मानसिक गणित है। इसके आगे और भी फायदे हैं जैसे विद्यार्थी तेज उन्नति करते हुए दिखते हैं और गणित में उनको और अधिक आनन्द आने लगता है जब उन्हें गणना मानसिक तौर पर करने की इजाजत मिलती है। आखिरकार गणित का उद्देश्य मानसिक स्तर पर है और लिखने में मानसिक और शारीरिक दोनों ही प्रक्रिया लगती है, इसलिए विद्यार्थी का ध्यान मानसिक और शारीरिक क्षेत्र के बीच पर्यायक्रमिक (Alternating) रहता है। यह प्रत्यावर्तन उन्नति के लिए एक महत्वपूर्ण योग्यता है लेकिन मानसिक स्तर पर ही कार्य करने के भी बहुत लाभ हैं।

मानसिक गणित अधिक रचनात्मक की ओर ले जाता है और विद्यार्थी गणित के उद्देश्य व उसके सम्बन्ध को अच्छे से समझने लगता है। वे प्रयोग करने लगते हैं (विशेष रूप से अगर उन्हें उत्साहित किया जाये) और अधिक लचीले हो जाते हैं। स्मृति व आत्मविश्वास भी मानसिक गणित से बढ़ जाते हैं।

RUSSIAN PEASANT MULTIPLICATION

यह उंगलियों का उपयोग कर 5 और 9 के बीच की संख्या को 5 से 9 तक की संख्या से गुणा करने का तरीका है और वैदिक तरीके जैसा ही है।



अंगुठे को अंक 5 मानकर व छोटी उंगली पर अंक 9 दर्शाये तरीके से लिखें। हथेली उपर की ओर। 8 को 7 से गुणा करने के लिए, बायें हाथ की ''8'' की उंगली और ''7'' की उंगली को एक साथ रखें। तब मिली हुई उंगली के उपर की उंगलियों को गिनें वहां 5 है, और दूसरी बायें हाथ की उंगलियाँ को दाहिने हाथ की उंगली से गुणा करें 2 × 3 = **6.**
इसलिए **8 × 7 = 56.**

7.5 बड़ी संख्यायें

अब उन संख्याओं का क्या, जो दूसरे आधार के निकट हैं जैसे 1000, 10,000 आदि?

10 **568 × 998** को हल करें

इस सवाल में संख्यायें 1000 के निकट है और कमी (Deficiencies) 432 और 2
568 से कमी निकालने के लिए सूत्र *''सभी 9 से और अंतिम 10 से'' (all from 9 & last from 10)* लगाया।

568 – 432
998 – 2 तरीका बिल्कुल वैसा ही है लेकिन हम दाहिनी ओर
566 / 864 तीन अंक लेते हैं क्योंकि आधार अब 1000 है।

संख्याओं का 1000 से अंतर 432 और 2 है।
तब तिरछा–घटाने पर: 568 – 2 = 566,
और खड़े–गुणा करने पर: 432 × 2 = 864.

इसलिए **568 × 998 = 566864**

11 **68777 × 99997** हल करें
इस तरीके से उपर दी गई बड़ी संख्याओं का भी आसानी से मानसिक तौर पर गुणा किया जाता है।

68777 – 31223
99997 – 3
68774 / 93669

दाये ओर, अंकों की संख्या उतनी ही होगी जितने शून्य आधार संख्या में है।

अभ्यास -G नीचे दिये हुए को मानसिक स्तर पर गुणा करें:

a 667 × 998	**b** 768 × 997	**c** 989 × 998	**d** 885 × 997
e 883 × 998	**f** 467 × 998	**g** 891 × 989	**h** 8888 × 9996
I 6999 × 9997	**j** 90909 × 99994	**k** 78989 × 99997	**l** 9876 × 9998

a 665/666	**b 765/696**	**c 987/022**	**d 882/345**
E 881/234	**f 466/066**	**g 881/199**	**h 8884/4448**
I 6996/9003	**j 90903/54546**	**k 78986/63033**	**l 9874/0248**

संख्याऐं आधार से उपर

मानें कि अब संख्याऐं आधार से अधिक है।

12 **1234 × 1003 = 1237702**. (1234+3=1237, 234×3=702)

13 **10021 × 10002 = 100230042**. (10021+2=10023, 0021×2=0042)

आधार 10000 के साथ यहा हमें दायीं ओर 4 अंक चाहिए।

अभ्यास -H

a 1222 × 1003 **b** 1051 × 1007 **c** 1123 × 1002

d 1007 × 1006 **e** 15111 × 10003

---

a 1225/666 b 1058/357 c 1125/246
d 1013/042 e 15115/5333

7.6 अनुपात से

अनुपात *(Proportionately)* से सिर्फ यह मतलब होता है कि आप दोगुना (या तीन गुना आदि) करके उत्तर प्राप्त कर सकते हैं।

हमने इस तरह के सवाल पहले काफी किए हैं।

14 **309 × 104** को हल करें
यहा ध्यान दें कि **309** है **3 × 103**.
इसका मतलब है कि हम 103 × 104 को हल करें(जिसके लिए सरल तरीका है) और उत्तर को 3 से गुणा करें।
103 × 104 = 10712.

और **10712 × 3 = 32136**.

आप संख्या विभाजन का उपयोग कर 10712 × 3 को हल कर सकते हैं: 1/07/12 × 3 = 3/21/36.

15 **192 × 92** को हल करें
यहाँ हम देखते है कि अगर 192 को आधा करें तो 96 हुआ।
इसलिए: 96 × 92 को हल करें और परिणाम को दोगुना करें।
96 × 92 = 8832, सूत्र *''खड़े और तिरछे''* *(Vertically & crosswise)* के सरल तरीके से।

और इसलिए **192 × 92 = 17664**, (8832 को दोगुना करने पर).

अभ्यास -I

a 212 × 103 **b** 106 × 208 **c** 182 × 98 **d** 93 × 186

a 21836 b 22048 c 17836 d 17298

16 **47 × 98** हल करें
यहाँ आप 47 को दोगुना करें जो 94 हुआ क्योंकि अब दोनों संख्याए 100 के पास है इसलिए हम 94 × 98 को हल करें और उत्तर को आधा करें।
94 × 98 = 9212
और 9212 का आधा **4606** है।

संख्या को आधा करने के लिए संख्या विभाजन का भी उपयोग कर सकते हैं: 9212 का आधा करने के लिए (92/12 का सोचें)

17 **192 × 44** को हल करें

यहाँ आप 192 को आधा कर सकते हैं और 44 को दोगुना।

यह सवाल को 96 × 88 में बदल देता है और उत्तर को न तो दोगुना और न आधा करना है क्योंकि दोगुना व आधा एक दूसरे को निरस्त कर देते हैं।

इसलिए 192 × 44 = 96 × 88 = **8448**

अभ्यास -I क्रमशः

e 93 × 46 **f** 56 × 104 **g** 306 × 118 **h** 51 × 104

I 206 × 54 **j** 44 × 99 **k** 48 × 184 **l** 228 × 212

E 4278 f 5824 g 36108 h 5304
I 11124 j 4356 k 8832 l 48336

अनुपात का दूसरा उपयोग

सूत्र *''अनुपात से''* *(Proportionately)* को दूसरी तरह उपयोग करने से इस गुणा करने के तरीके का क्षेत्र और आगे बढ़ जाता है।

18 **213 × 203 = 43239**.

$$\begin{array}{r} 213 + 13 \\ \underline{203 + \;\;3} \\ 2 \times \underline{216} \; / \; \underline{39} = \underline{\mathbf{43239}} \end{array}$$

यहाँ हम देखते हैं कि संख्याऐ पहले उपयोग किए किसी भी आधार 10, 100, 1000 के निकट नहीं है। लेकिन वे 200 के निकट हैं और अन्तर 13 और 3, जैसा उपर बताया है।

सामान्यतः पीछे सीखे तरीके से 216/39 हुआ (213+3=216, 13×3=39)

अब चूंकि हमारा आधार 200 जो 100×2 है हम **सिर्फ बायें भाग** के उत्तर 216 को 2 से गुणा करें 43239 प्राप्त करने के लिए।

19 **29 × 28 = 812**.

आधार 30 (3×10) है,
और अन्तर है –1 और –2
तिरछा घटाने पर 27 हुआ
दायेंओर खड़ा गुणा करने पर 2 प्राप्त हुआ
और अंत में 3×27 = 81.

$$\begin{array}{r} 29 - 1 \\ \underline{28 - 2} \\ 3 \times \underline{27 / 2} = \underline{\mathbf{812}} \end{array}$$

ये केवल पहले सवालों जैसा ही है लेकिन अन्त में अतिरिक्त गुणा के साथ (सिर्फ बायें भाग में)

20 हल करें **33 × 34**.

इस उदाहरण में यहाँ हांसिल है:

$$\begin{array}{r} 33 + 3 \\ \underline{34 + 4} \\ 3 \times \underline{37 / {}_{1}2} = 111 / {}_{1}2 = \underline{\mathbf{1122}} \end{array}$$

ध्यान दें कि दायें तरफ के भाग में 3 का गुणा नहीं करना है, सिर्फ बायें भाग में हांसिल जोड़ने के पहले 3 से गुणा करें।

अभ्यास -J मानसिक रूप से गुणा करें:

a 41 × 42	**b** 204 × 207	**c** 321 × 303	**d** 203 × 208
e 902 × 909	**f** 48 × 47	**g** 188 × 196	**h** 199 × 198
I 189 × 194	**j** 207 × 211	**k** 312 × 307	**l** 5003 × 5108
m 63 × 61	**n** 23 × 24	**o** 79 × 77	

a	**172/2**	**b**	**422/28**	**c**	**972/63**	**d**	**422/24**
E	**8199/18**	**f**	**225/6**	**g**	**368/48**	**h**	**394/02**
I	**366/66**	**j**	**436/77**	**k**	**957/84**	**l**	**25555/324**
m	**3843**	**n**	**552**	**o**	**6083**		

7.7 दूसरे आधार के निकट की संख्याओं का गुणा करना

कभी–कभी हमें ऐसी संख्याओं का गुणा करना होता है जो प्रत्येक अलग आधार के निकट हो। नीचे दिये गये उदाहरण में एक संख्या 10000 के निकट है और दूसरी 100 के निकट है।

21 **9998 × 94 = 9398/12**

यहाँ संख्याऐं अलग–अलग आधार के निकट हैः 10,000 और 100,
और अन्तर –2 और –6 है।
हम जैसा बताया है ऐसा लिखे या कल्पना करें: 9998 –02

$$\begin{array}{r} 9998 - 02 \\ \underline{94 - \;\;6} \\ \underline{9398 / 12} \end{array}$$

यह महत्वपूर्ण है कि संख्या को जैसा बताया है इस तरह जमायें, क्योंकि 6 को 8 में से नहीं घटाया है जैसा सामान्यतया करते हैं लेकिन उसे 9 से घटाया है जो कि 94 के 4 के उपर है। यहाँ वह बायें से दूसरा कालम है।

इसलिए **9998** हो जाता है **9398**.

तब कमी (Deficiencies) को आपस में गुणा करें: 2×6 = **12**.

ध्यान रहे उत्तर के दायेंभाग की संख्या नीचे की संख्या के आधार से सम्बन्धित है, (94 , 100, के पास है इसलिए दायेंतरफ 2 अंक हैं)।

यह तरीका क्यों काम करता है आप इस सवाल 9998 × 9400 से देख सकते हैं, जो कि ऊपर दिये गये सवाल का 100 गुना है।

$$\begin{array}{l} 9998 - 0002 \\ \underline{9400 - \;\;600} \\ \underline{9398 / 1200} \end{array}$$

अब हम देखते हैं कि 9998 × 9400 = 93981200,

तब 9998 × 94 = 939812.

यह भी बताता है कि 6 को बायें से दूसरे कालम में क्यों घटाया। .

अभ्यास -K हल करें:

a 97 × 993 **b** 92 × 989 **c** 9988 × 98 **d** 9996 × 988

---

a 963/21 b 909/88 c 9788/24 d 9876/048

अगले उदाहरण में संख्याऐं अलग–अलग आधार के निकट हैं, लेकिन वे आधार से कम होने के बजाय अधिक है।

22 **10007 × 1003 = 10037021**.

संख्या को दिखाये गये तरीके से लिखे:

$$\begin{array}{r} 10007 + 007 \\ \underline{1003\ +\ \ 3} \\ \underline{10037 / 021} \end{array}$$

हम देखते हैं कि तीन अंक दाहिनी तरफ चाहिए और 3 अतिरिक्त को चौथे कालम में, जोड़ने पर 10037 प्राप्त हुआ।

अभ्यास –L हल करें:

a 103 × 1015 **b** 106 × 1012 **c** 10034 × 102 **d** 1122 × 104

---

a 1045/45 b 1072/72 c 10234/68 d 1166/88

7.8 आधार के पास की संख्या का वर्ग निकालना

जो संख्याऐं आधार के पास हैं उनका वर्ग निकालने के लिए यह विशेष रूप से सरल है।
आपको याद होगा कि वर्ग निकालना मतलब किसी संख्या को अपने आप से गुणा करना।
(जैसे 96 × 96).
इस तरीके का वर्णन उप–सूत्र *''जितना कम उतना और कम करके वर्ग की योजना भी करें''* *(Reduce or increase by the Deficiency and also set up the square)*

23 **96^2 = 92/16**.

96, 100 से 4 कम है इसलिए हम 96 से 4 कम करते हैं, जो हमें उत्तर का प्रथम भाग देता है, **92**.
अंतिम भाग सिर्फ 4^2 =**16**, जैसा कि सूत्र कहता है।

24 **1006^2 = 1012/036.**
यहाँ 1006 को 6 से बढ़ाने पर 1012 और 6^2 = **36**: लेकिन आधार 1000 होने से हमें दायी और 3 अंक चाहिए, इसलिए हम 036 रखें।

अभ्यास -M इनका वर्ग निकालें:

a 94	**b** 103	**c** 108	**d** 1012
e 98	**f** 88	**g** 91	**h** 10006
I 988	**j** 997	**k** 9999	**l** 9989
m 111	**n** 13	**o** 987	

a 8836	**b 10609**	**c 11664**	**d 1024144**
E 9604	**f 7744**	**g 8281**	**h 100120036**
I 976144	**j 994009**	**k 99980001**	**l 99780121**
m 12321	**n 169**	**o 974169**	

25 **304^2 = 3×308/16 = 92416.**
यह वैसा ही है लेकिन क्योंकि हमारा आधार 300 है बायीं ओर के हिस्से को 3 से गुणा करना है।

अभ्यास -N नीचे दिये का वर्ग करें:

a 206	**b** 212	**c** 302	**d** 601
e 21	**f** 72	**g** 4012	**h** 511

a 424/36	**b 449/44**	**c 912/04**	**d 3612/01**
E 44/1	**f 518/4**	**g 16096/144**	**h 2611/21**

वैदिक प्रणाली में गुणा करने के बहुत से विशेष तरीके हैं: देखें अध्याय 10. और अगर कोई विशेष तरीका ध्यान में नहीं आता है तो सामान्य तरीका (पाठ 11) तो हमेशा है ही।

7.9 सारांश

यहाँ, गुणा व वर्ग के लिए जो विभिन्न तरीके अभी तक उपयोग किए हैं उन्हें हम संक्षेप में प्रस्तुत करते हैं :–

1. 4, 8 से गुणा करने के लिए हम सिर्फ दोगुना, दो बार, तीन बार कर सकते हैं जैसे 37×4.

2. हम दोगुने का उपयोग कर पहाड़े बढ़ा सकते हैं जैसे 14×8.

3. हम बायें से दायेंगुणा ''ऑन द फ्लेग''(*On the flag*) के उपयोग से कर सकते हैं जैसे 456×3.

4. हम आधार के पास की संख्या को गुणा करने के लिए *सूत्र ''सभी 9 से और अंतिम 10 से''* *All from 9 & the last from 10* का उपयोग कर सकते हैं। जैसे 98×88, 103×104, 203×204.

5. और हम अलग–अलग आधार की संख्या का गुणा कर सकते हैं जैसे 998×97.

6. यही सूत्र आधार के पास की संख्या का वर्ग निकालने के लिए भी उपयोग कर सकते हैं। जैसे 97^2, 1006^2, 203^2.

अभ्यास -O नीचे दिये गये सवाल में जितने भी तरीके गुणा करने के देखें हैं वे उन सब का मिश्रण है।

a 654 × 3	**b** 86 × 98	**c** 97 × 92
d 73 × 4	**e** 7 × 22	**f** 16 × 24
g 798 × 997	**h** 8899 × 9993	**i** 106^2
J 996^2	**k** 103 × 109	**l** 123 × 104
m 203 × 209	**n** 188 × 197	**o** 87 × 97
p 32 × 33	**q** 2004 × 2017	**r** 9997 × 98
S 1023 × 102		

---

a 1962	**b 8428**	**c 8924**
d 292	**e 154**	**f 384**
g 795606	**h 88927707**	**i 11236**
J 992016	**k 11227**	**l 12792**
m 42427	**n 37036**	**o 8439**
p 1056	**q 4042068**	**r 979706**
S 104346		

"विद्यार्थियों को केवल उन विशेष लक्षणों को देखकर, उनकी विशेषता पहचानकर उन पर उपयुक्त सूत्र भर लगाना पड़ता है."

''वैदिक गणित से'' पेज 94, Page 106.

अध्याय 8
जाँच करना और विभाजनियता

सारांश

8.1 अंक जोड़ जाँच विभाजन के लिए–विभाजन के सवालों की जाँच करना
8.2 पहले से पहला और अंतिम और अंतिम से अंतिम – अधिक जाँच के तरीके
8.3 4 से विभाजनियता
8.4 11 से विभाजनियता

8.1 विभाजन के लिए अंक जोड़ जाँच

1 हल करें **3456 ÷ 7**.

$$7\overline{)3\ 4^{6}5^{2}6}$$
$$\underline{4\ 9\ 3}\ \text{शेष}\ \underline{5}$$

सामान्य तरीके से विभाजन किया है :

34÷7 = 4 शेष 6, रखे जैसे दिखाया है
65÷7 = 9 शेष 2, रखे जैसे दिखाया है
26÷7 = 3 शेष 5, जैसा दिखाया है

इसलिए **3456 ÷ 7 = 493** शेष **5**.

अगर उपरोक्त विभाजन ठीक है तब **493×7 + 5 = 3456**.
(जैसा कि 7 ÷ 3 = 2 शेष 1 सही है क्योंकि 2 × 3 + 1 = 7.)

हम जाँच सकते हैं कि **493×7 + 5 = 3456** सही है प्रत्येक संख्या को उसके अंक जोड़ में बदल कर : 493 का अंक जोड़ 7 है, 3456 का अंक–जोड़ 9 है।

इसलिए **493 × 7 + 5 = 3456**

हो जाता है **7 × 7 + 5 → 9**

और यह अंक–जोड़ में सही है क्योंकि 7×7=49 → 4, और 4+5 → 9.
(उपर की लाईन का दूसरा प्रकार होगा: 7×7 + 5 = 54, 54 → 9)

2 हल करें **70809 ÷ 6**.

$$6\overline{)7^{1}0^{4}8^{0}0^{0}9}$$

$\underline{1\ 1\ 8\ 0\ 1}$ शेष $\underline{3}$ यह उत्तर है

जाँचने पर आप देखते हैं कि 11801× 6 + 3 = 70809 अंक–जोड़ में सही है।
यह हो जाता है 2×6 + 3 →6 अंक–जोड़ में और यह सही है।
क्योंकि 2×6=3 अंक–जोड़ में और 3 + 3 = 6.

अभ्यास -A इनको भाग दें। अंक–जोड़ का उपयोग कर जाँचे:

a 3)4 6 8 1 **b** 4)9 1 3 **c** 5)7 0 3 2

d 6)3 2 1 **e** 7)2 2 2 **f** 8)9 0 8 0

g 9)1 0 0 1 **h** 2)3 4 5 6 7

a	**1560 r1 (3×3+1 1)**	**b**	**228 r1 (3×4+1 4)**	**c**	**1406 r2 (2×5+2 3)**
d	**53 r3 (8×6+3 6)**	**e**	**31 r5 (4×7+5 6)**	**f**	**1135 r0 (1×8+0 8)**
g	**111 r2 (3×9+2 2)**	**h**	**17283 r1 (3×2+1 7)**		

8.2 पहले से पहला व अंतिम से अंतिम

पहले से पहला

सूत्र *''पहले से पहला और अंतिम से अंतिम'* (*The First by the First and the Last by the Last)* किसी सवाल के लगभग उत्तर के लिए उपयोगी है। कभी–कभी आपको उत्तर का पहला अंक व बाद के शून्य चाहिए, बजाए कि सवाल के पूरे हल के। तब आप यह तरीका उपयोग कर सकते हैं।

3 **32 × 41** लगभग है **1000**.

प्रत्येक संख्या के प्रथम अंक को आपस में गुणा करने पर आप पायेंगे 32 × 41 लगभग है 30 × 40, है जो कि 1200 होता है।
इसलिए आप उत्तर करीब 1000 उम्मीद करते हैं 1000 के निकटतम।

4 **641 × 82** का लगभग मूल्य निकालें।

आपको चाहिए पहला अंक व उसके बाद जितने शून्य आते हैं। चूंकि 600 × 80 = 48,000 और आप जानते हैं कि उत्तर इससे अधिक होगा तब आप कह सकते हैं कि उत्तर करीब 50,000 (10,000 के निकट).

5 **39 × 63** का लगभग मूल्य निकालें।

39 , 40 के पास है इसलिए सूत्र *''पहले से पहला''* द्वारा मिलता है
40 × 60 = 2400. इसलिए आप कह सकते हैं 2000.

6 **383 × 88** का लगभग मूल्य निकालें।
400 × 90 = 36,000 और उत्तर इससे कम होना चाहिए। क्योंकि 400 और 90 दोनों वास्तविक संख्या से अधिक हैं। इसलिए 383 × 88 ≈ 30,000.

प्रतीक चिन्ह पर ध्यान दें ≈ **लगभग बराबर।**

इसलिए आप देखते हैं कि सूत्र *''पहले से पहला'' (the first by the first)* से हमें उत्तर का प्रथम अंक और उत्तर में कुल अंकों की संख्या भी स्पष्ट होती है

हम हमेशा प्रथम अंक के बारे में निश्चित नहीं हो सकते (जैसा अंतिम उदाहरण में) लेकिन कभी भी एक अंक से अधिक का अन्तर नहीं होगा।

अभ्यास -B लगभग मूल्य निकालें:

a 723 × 81 **b** 67 × 82 **c** 4133 × 572

d 38 × 49 **e** 6109 × 377 **f** 3333 × 4444

g 1812 × 1066

---

a 60,000 **b 5000 or 6000** **c 2,000,000**
d 2000 **e 2,000,000** **f 10,000,000**
g 2,000,000

सूत्र (वास्तव में उप सूत्र) *''पहले से पहला व अंतिम से अंतिम'* कई तरह से उपयोग होता है। उदाहरण के लिए लाईन नापने या लाईन खींचने में (प्रोटेक्टर से कोण नापने में) हम लाईन के प्रथम बिन्दू से स्केल पर पहिला निशान लगाते हैं और अंतिम बिन्दू की स्थिति स्केल से देखते हैं।

अध्याय 10.4 देखें। यह सूत्र आवर्ती दशमलव विभाज्यता आदि Factorinzing quardratics, Cubics etc. संदर्भ 3 देखें।

अंतिम से अंतिम

सवाल के अंतिम अंकों को देख कर गणना का अंतिम अंक निकाल सकते हैं।

7 **72 × 83** , **6** में समाप्त होता है।

प्रत्येक संख्या के अंतिम अंकों को गुणा करने पर उत्तर का अंतिम अंक मिलता है। : 2 × 3 = **6**.

8 **383 × 887** , **1** में समाप्त होता है।

चूंकि 3 × 7 = 21, जो कि 1 में समाप्त होता है।

9 **23 × 48 × 63** में अंतिम अंक **2**

क्योंकि 3×8 में अंतिम अंक 4 और 4×3=12 अंतिम अंक **2**

अभ्यास –C नीचे दिये गये का अंतिम अंक क्या है?

a 456 × 567	**b** 76543 × 97	**c** 67 × 78 × 89
d 789 + 987	**e** 346 × 564	**f** 5328 + 9845

---

a	**2**	**b**	**7**	**c**	**4**
d	**6**	**e**	**4**	**f**	**3**

8.3 4 से विभाजनियता

सूत्र *''अंतिम और उपान्तिम का दोगुना''* (*Ultimate and Twice the Penultimate)* का उपयोग यह जाँचने के लिए किया जा सकता है कि क्या संख्या में 4 से भाग पूरी तरह जाता है ?
Ultimate का मतलब अंतिम अंक,

penultimate का मतलब अंतिम से पहले का अंक।

10 इसलिए संख्या **12376** में सूत्र बताता है कि 6 और 7 के दोगुने को जोड़ें (6+2×7) तो यह आपको 20 देता है, और **चूंकि 20 में 4 का भाग पूर्ण रूप से जाता है अतः 12376 में 4 से भाग पूरी तरह जायेगा।**

इसलिए जब सूत्र *''अंतिम व उप–अंतिम का दुगना''* का उपयोग कर रहे हैं आप अंतिम अंक को उससे पहले के अंक के दोगुने में जोड़ें और परिणाम 4 से विभाजित होता है तो दी हुई संख्या 4 से विभाजित होगी अन्यथा यह 4 से विभाजित नहीं होगी।

11 संख्या **5554** में सूत्र लगाने पर हमें मिलता है 4+2×5, जो कि 14 है। लेकिन 14 में 4 का भाग पूरी तरह नहीं जाता है इसलिए **5554, 4 से विभाजित नहीं होगी।**

अभ्यास –D प्रत्येक नीचे दी गई संख्या के लिए, सूत्र द्वारा कितना प्राप्त होता है और तब यह लिखें कि क्या संख्या 4 से विभाजित होती है।

a 246 **b** 656 **c** 92

d 5573 **e** 7624 **f** 345678

a 14, no **b 16, yes** **c 20, yes**
d 17, no **e 8, yes** **f 22, no**

8.4 11 से विभाजनियता

11 से विभाजनियता का जाँच करना खासतौर पर सरल है और सूत्र *''जोड़ने से और घटाने से'* (*By Addition and by Subtraction)* के अन्तर्गत आता है।

12 **7282231** क्या 11 से विभाजित होती है?

हम सभी विषम स्थित व सम स्थित अंको को जोड़कर, कम परिणाम को अधिक से घटाते हैं।
ऐसा करने पर हमें 0,11 या 11 के गुणक प्राप्त हो तो संख्या 11 से विभाजित होती है।

7 2 8 2 2 3 1 विषम स्थिति में: 7 + 8 + 2 + 1 = 18
सम स्थिति में: 2 + 2 + 3 = 7

चूंकि यहाँ 18 – 7 = 11 संख्या **7282231 विभाजित होती है 11 से**

अभ्यास -E नीचे दी गई संख्या की 11 से विभाजनियता के लिए जाँच करें:

a 5192	**b** 3476	**c** 1358016
d 85547	**e** 570317	**f** 1030607

a Yes	**b Yes**	**c Yes**
d Yes	**e Yes**	**f No**

11 से विभाजन के बाद शेष

हमने अभी पिछले उदाहरण में देखा कि, संख्या 11 से विभाजित है इसे हल करने के लिए एक छोड़ कर एक अंक को जोड़ कर घटाया।

उदाहरण के लिए 727 हम पायेंगे 14–2=**12**.
क्योंकि 12, 11 का गुणक नहीं है। अतः 11 से विभाजित नहीं होगी।

लेकिन यह 12, 11 से भाग देने के बाद शेष है।
वास्तव में 12, 11 से 1 अधिक है हम कह सकते हैं न्यूनतम शेष **1** है।
ध्यान दें हम **विषम** स्थिति के अंकों के जोड़ से **सम** स्थिति के अंकों के जोड़ को घटाते हैं।

13 38042 को 11 से विभाजित करने पर शेष पाने के लिए हम निकालते हैं (3+0+2) – (8+4) = –7.
आपके द्वारा इस –7 में 11 जोड़ने पर **4** हुआ जो न्यूनतम शेष है। (–7 या 4 दोनों यहां ठीक हैं)

अभ्यास -F नीचे दी हुई प्रत्येक संख्या का 11 से शेष निकालें:

a 71263	**b** 45678	**c** 203527	**d** 67
e 349	**f** 3817	**g** 1827	**h** 8351
I 481	**j** 34143	**k** 523281	**l** 909192

a 5	**b 6**	**c 5**	**d 1**
E 8	**f 0**	**g 1**	**h –9 or 2**
I –3 or 8	**j –1 or 10**	**k 0**	**l –2 or 9**

दूसरी अंक जोड़ जाँच

हम पहले ही एक अंक जोड़ जाँच से परिचित हैं, जो अगर गणना सही है तो उसे बताने में मदद करती है।

उदाहरण के लिए, $2434 \times 32 = 77888$ अंक–जोड़ से पुष्टि होती है कि यह सही है, क्योंकि अंकों को जोड़ने पर मिलता है $4 \times 5 \rightarrow 2$, जो उत्तर के अंक जोड़ के बराबर है।

यह विधि इसलिए काम करती है कि संख्या के अंकों को जोड़ने पर हमें वही अंक मिलता है जो 9 से भाग देने पर शेष बचता है।

9 के बजाय **11** से किसी संख्या में भाग दें व जो शेष बचता है वह भी इसी तरीके का काम करता है।

14 माना कि हम **$2434 \times 32 = 77888$** दूसरे तरीके से जाँचना चाहते हैः

उपर उदाहरण में दी गई प्रत्येक संख्या के शेष 11 से भाग देकर निकालते हैं।

संख्या को शेष से बदलने पर हमे मिलता हैः $3 \times 10 \rightarrow 8$ और यह सही है इस गणित में क्योंकि 30 को 11 से भाग देने पर साफ तौर पर शेष 8 बचता है।

अभ्यास -G नीचे दिये गये प्रश्नों में दूसरी जाँच के हिसाब से कितने सही हैं?

a $213312 \times 45 = 9599040$ **b** $234 \times 234 = 54756$ **c** $3741 \times 45 = 186345$

d $86 \times 68 = 5848$ **e** $876 \times 333 = 290808$ **f** $1011 \times 1101 = 1113111$

---

a **$0\times1=0$:** सही **b** **$3\times3=9$:** सही **c** **$1\times1=5$:** गलत
d **$-2\times2=7$:** सही **e** **$7\times3=1$:** गलत **f** **$-1\times1=-1$:** सही

अध्याय 9
शिरोरेखा संख्या (BAR NUMBERS)

सारांश

9.1 शिरोरेखा संख्या को हटाना– उन संख्याओ को धनात्मक रूप में बदलना जिसमें ऋणात्मक अंक हैं

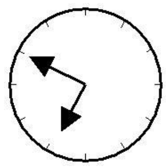
9.2 घटाना –घटाने का सामान्य तरीका

9.3 शिरोरेख संख्या को बनाना– 5 से उपर के अंक को हटाना

9.4 शिरोरेखा संख्या का उपयोग–शिरोरेखा संख्या के कुछ उपयोग

9.1 शिरोरेखा संख्या को हटाना

संख्या 19, 20 के बहुत निकट है।
और इसलिए इसे सरलता से दूसरी तरह लिख सकते हैं: जैसे $2\bar{1}$
$2\bar{1}$ बार का मतलब है 20 – 1, ऋणात्मक चिन्ह 1 के उपर स्थित है इसी तरह $3\bar{1}$ मतलब 30–1 या 29 और $4\bar{2}$ मतलब 38
यह इसी तरह है कि समय 6:50 को कहना ''7 में 10 कम''



हम $4\bar{2}$ का उच्चारण इस तरह करते हैं ''four , bar two'' क्योंकि 2 के उपर शिरोरेखा (BAR) है।

1 $7\bar{2} = 68$,

$86\bar{1} = 859$, क्योंकि $6\bar{1} = 59$ (8 को नहीं बदला है),

$127\bar{2}$ = 1268, क्योकि **7** $\bar{2} = 68$,
6 $\bar{3}$ **0 = 570**, क्योंकि हमारे पास 600 – 30 (या $6\bar{3} = 57$).

अभ्यास -A नीचे दी गई संख्या को बदलें

a $6\bar{1}$ **b** $8\bar{2}$ **c** $3\bar{3}$ **d** $5\bar{7}$ **e** $46\bar{2}$

F $999\bar{1}$ **g** $1\bar{2}$ **h** $11\bar{1}$ **i** $12\bar{3}$ **j** $3\bar{4}0$

a	**59**	**b**	**78**	**c**	**27**	**d**	**43**	**e**	**458**
F	**9989**	**g**	**8**	**h**	**109**	**i**	**117**	**j**	**260**

एक संख्या में कोई भी अंक पर शिरोरेखा हो सकती है।

2 आप $5\bar{1}3$ से शिरोरेखा कैसे हटायें ।

सबसे अच्छा तरीका है कि संख्या को दो भागों में विभाजित करें : $5\bar{1}/3$. चूकि $5\bar{1} = 49$, उत्तर **493**.

अगर किसी संख्या में बार अंक है तो बार के बाद की संख्या को विभाजित करें। (बार का अर्थ है – ''शिरोरेखा'')

3 $\mathbf{7\bar{3}1} = 7\bar{3}/1 = \mathbf{671}$,

$\mathbf{52\bar{4}2} = 52\bar{4}/2 = \mathbf{5162}$,

$\mathbf{3\bar{2}15 = 3\bar{2}/15 = 2815}$ क्योंकि $\mathbf{3\bar{2} = 28}$,

$\mathbf{5\bar{1}3\bar{2} = 5\bar{1}/3\bar{2} = 4928}$ क्योंकि $5\bar{1} = \mathbf{49}$ और $\mathbf{3\bar{2} = 28}$.

$\mathbf{3\bar{1}3\bar{2}3\bar{3}} = 3\bar{1}/3\bar{2}/3\bar{3} = \mathbf{292827}$.

अभ्यास -B संख्या से शिरोरेखा हटायें:

a $6\bar{1}4$	**b** $4\bar{2}3$	**c** $5\bar{2}5$	**d** $3\bar{1}7$
e $45\bar{2}3$	**f** $333\bar{2}3$	**g** $5\bar{1}32$	**h** $6\bar{2}7\bar{3}$
I $2\bar{1}1$	**j** $41\bar{3}1$	**k** $1\bar{3}151\bar{1}$	**l** $1\bar{3}1$

a	**594**	**b**	**383**	**c**	**485**	**d**	**297**
E	**4483**	**f**	**33283**	**g**	**4932**	**h**	**5867**
I	**191**	**j**	**4071**	**k**	**7149**	**l**	**71**

आगे मानें कि शिरोरेखा 1 से अधिक अंको पर है।

सभी 9 से और अंतिम 10 से (All from 9 & the last from 10)

अभी तक हमने देखा कि सिर्फ एक अंक पर ही शिरोरेखा थी।
लेकिन संख्या में दो या उससे अधिक अंक पर भी शिरोरेखा हो सकती है।

$5\overline{33}$ से शिरोरेखा हटायें ।

ऊपर दी हुई संख्या में $\overline{5}$ मतलब 500, और 33 का अर्थ है 33 को घटाना ।

इसलिए $5\overline{33}$ मतलब 500–33, हमने इस तरह के सवाल अध्याय 5 में किए हैं।

500–33=467 क्योंकि 33 एक सौ में से निकलता है इसलिए 5 कम होकर 4 हो जाता है।

और सूत्र *''सभी 9 से और अंतिम 10 से'' (All from 9 and last from 10)* 33 पर लगाने से मिलता है 67।

इसी तरह $7\overline{14}$ = 686 7 कम होकर 6 और सूत्र बदलता है 14 को 86 में।

26 $\overline{21}$= 2579 26 कम होकर 25,

$7\overline{02}$=698 सूत्र बदलता है 02 को 98 से

$50\overline{3}$=497 50 कम होकर 49 (दूसरे तरीके से $50\overline{3}$को 503 लिखें: पिछला उदाहरण देखें)

$4\overline{20}$=$4\overline{2}0$= 380.

$4\overline{23}1$=3771

यहाँ हम संख्या को शिरोरेखा के बाद विभाजित कर सकते हैं : $4\overline{23}$ / 1 कर सकते हैं।

$4\overline{23}$ बदलकर 377, और हम अंत में केवल 1 रख देतें हैं: $4\overline{23}$ 1=3771

इसी तरह $5\overline{12}$ 4=512 / 4 =4884,

$3\overline{11}33$=$3\overline{11}$ / 33=28933,

$5\overline{123}$=4877,

$3\overline{1}4\overline{31}$=$3\overline{1}$ / $4\overline{31}$=29369

अभ्यास -C शिरोरेखा को हटाऐं:

a $6\overline{12}$	**b** $7\overline{33}$	**c** $5\overline{11}$	**d** $9\overline{04}$	**e** $72\overline{41}$	**f** $333\overline{22}$
g $6\overline{21}4$	**h** $5\overline{31}22$	**i** $33\overline{22}44$	**j** $7\overline{333}$	**k** $5\overline{104}$	**l** $44\overline{112}$
m $74\overline{031}$	**n** $7\overline{103}1$	**o** $6\overline{3322}$	**p** $3\overline{1}10\overline{2}$	**q** $3\overline{11}4\overline{1}$	**r** $3\overline{2}1\overline{22}$

a 588	**b 667**	**c 489**	**d 896**	**e 7159**	**f 33278**
g 5794	**h 46922**	**i 327844**	**j 6667**	**k 4896**	**l 43888**
m 73969	**n 68971**	**o 56678**	**p 29098**	**q 28939**	**r 28078**

शिरोरेखा संख्या के लाभ

शिरोरेखा संख्या एक सरल युक्ति है जिसे हम आगे के कार्य में उपयोग करेंगे। इसके खास फायदे हैं:

1. शिरोरेखा संख्या हमें लचीलापन देती हैः हम इसे हमारी आवश्यकतानुसार उपयोग कर सकते हैं।
2. बड़ी संख्याऐं जैसे 6, 7, 8, 9 से बचा जा सकता है।
3. अंक एक दूसरे को रद्द करते हैं या रद्द किए जा सकते हैं।
4. इनके उपयोग से गणना में 0 और 1 सामान्यतौर से अधिक बार आते हैं।

9.2 घटाना

शिरोरेखा संख्या हमें घटाने का वैकल्पिक तरीका देती है।
विद्यार्थी कभी–कभी घटाने की क्रिया में प्रत्येक कॉलम के अंको को घटाते वक्त बिना यह देखे घटा देते हैं कि उपर का अंक बड़ा है या नहीं।
इस तरीके का उपयोग सही उत्तर प्राप्त करने के लिए कर सकते हैं।

8

$$\begin{array}{r} 444 \\ \underline{286}\,- \\ \hline \end{array}$$

प्रत्येक कॉलम में घटाने पर हम प्राप्त करते हैं 4–2 = 2, 4–8 = –4, 4–6 = –2.
लेकिन उत्तर के ऋणात्मक अंकों को शिरोरेखा लगाकर लिख सकते हैं:

$$\begin{array}{r} 444 \\ \underline{286} \\ \underline{2\,\overline{4}\,\overline{2}} \end{array}$$

और $2\overline{42}$ को सरलता से बदल दिया **158** में

9 इसी तरह

$$\begin{array}{r} 6767 \\ \underline{1908}\,- \\ \underline{5\overline{2}\;6\overline{1}} \end{array} = \mathbf{4859}$$

अभ्यास -D शिरोरेखा संख्या का उपयोग कर घटायें:

a 543 $\underline{168}$ –	**b** 567 $\underline{279}$ –	**c** 804 $\underline{388}$ –	**d** 737 $\underline{558}$ –	**e** 6413 $\underline{1878}$ –
F 8024 $\underline{5339}$ –	**g** 6543 $\underline{2881}$ –	**h** 7103 $\underline{3991}$ –	**i** 4545 $\underline{1791}$ –	**j** 3204 $\underline{2081}$ –

a 375 **b** 288 **c** 416 **d** 179 **e** 4535
F 2685 **g** 3662 **h** 3112 **i** 2754 **j** 1123

9.3 संख्याओं को शिरोरेखा संख्या बनाना

हमें संख्याओं को शिरोरेखा संख्या के रूप में करने की आवश्यकता हो सकती है।

10

79 = 8$\bar{1}$ क्योंकि 79 से 1 कम 80,

239 = 24$\bar{1}$ क्योंकि 39 = 4$\bar{1}$,

7689 = 769$\bar{1}$ क्योकि 89 = 9$\bar{1}$.

508 = 51$\bar{2}$ 08 होता है 1$\bar{2}$

अभ्यास -E इन्हें शिरोरेखा संख्या के रूप में लिखें:

a 49	**b** 58	**c** 77	**d** 88
e 69	**f** 36	**g** 17	**h** 359
I 848	**j** 7719	**k** 328	**l** 33339
m 609	**n** 708		

a $5\bar{1}$ **b** $6\bar{2}$ **c** $8\bar{3}$ **d** $9\bar{2}$
E $7\bar{1}$ **f** $4\bar{4}$ **g** $2\bar{3}$ **h** $36\bar{1}$
I $85\bar{2}$ **j** $772\bar{1}$ **k** $33\bar{2}$ **l** $3334\bar{1}$
m $61\bar{1}$ **n** $71\bar{2}$

बार संख्या का एक विशेष लाभ है कि हम बड़े अंकों को संख्या से हटा सकते हैं। उदाहरण के लिए 19 को 21 जैसा लिखना मतलब हमें बड़ी संख्या 9 का उपयोग नहीं करना पड़ेगा। .

11 **287** से बड़े अंक हटायें।

यहाँ 8 और 7 बड़े अंक हैं। हम कहते हैं कि 6, 7, 8, 9 बड़े अंक हैं।

इसलिए हम 287 को $31\bar{3}$ की तरह लिखते हैं, शुरू में जो 2 है उसे 1 से बढ़ाया व सूत्र *''सभी नौ में से अंतिम दस में से''* *(All from nine last from Ten)* 87 पर लगाया जिससे 13 हुआ। आप इससे सहमत होंगे कि 287, 300 से 13 कम है और 313 यही दर्शाता है।

12 इसी तरह **479** = $5\overline{21}$

3888 = $4\overline{112}$,

292 = $3\bar{1}$ **2**,

4884 = $5\overline{12}$**4**,

77 = $\overline{123}$(और आप 77 को 077 सोच सकते हैं),

क्रमशः

अभ्यास -F नीचे दिये गये से बड़े अंक को हटायें:

a 38	**b** 388	**c** 298	**d** 378
e 3991	**f** 3822	**g** 4944	**h** 390
I 299	**j** 98	**k** 87	**l** 888
m 996	**n** 2939	**o** 1849	**p** 7

---

a $4\bar{2}$	**b** $4\overline{12}$	**c** $30\bar{2}$	**d** $4\overline{22}$
E $4\overline{01}1$	**f** $4\bar{2}22$	**g** $5\bar{1}44$	**h** $4\bar{1}0$
I $3\overline{01}$ or $30\bar{1}$	**j** $1\overline{02}$	**k** $1\overline{13}$	**l** $1\overline{112}$
m $1\overline{004}$	**n** $3\bar{1}4\bar{1}$	**o** $2\bar{2}5\bar{1}$ or $2\overline{151}$	**p** $1\bar{3}$

"तथा कुछ महत्वपूर्ण तथा प्रभावशाली प्रकरणों में 30, 50, 100 या इनसे भी अधिक दुष्कर पैड़ियों वाले (प्रचलित पाश्चातय विधि द्वारा) प्रश्नों का हल वैदिक पद्वति द्वारा एक ही पैड़ी में कर सकते हैं तथा (10 या 12 वर्ष की आयु वाले) बालक गण काले तख्ते पर लिखे सवालों को केवल देखकर तत्काल ही उनका उत्तर दीक्षान्त सभाभवन के बीच में से ही (या जो भी कक्षा का स्थान हो वहां से) चिल्ला देते हैं। यह इसलिए कि प्रत्येक अंक अपने आगामी अंक और पूर्वगामी अंक को स्वतः निर्धारित करता है। और बालक मौखिक विधि द्वारा (बिना कागज और पेंसिल की सहायता के) एक के बाद दूसरा अंक चटाचट बोलते जाते हैं।!"

वैदिक गणित से, पेज नं. xvii.

9.4 शिरोरेखा संख्याओं का उपयोग

अंत में यहाँ कुछ उदाहरण हैं जहाँ शिरोरेखा संख्या का इस्तेमाल किया जा सकता है।

13 **29 + 48 = 77.**

29 का इस तरह लिख सकते हैं **$3\bar{1}$** और 48 को **$5\bar{2}$** :

$$\begin{array}{rcr} 29 & & 3\bar{1} \\ \underline{5\bar{2}} & + & \underline{48} + \\ \underline{77} & & \underline{77} \end{array}$$

14 **623 – 188 = 435.**

$$\begin{array}{r} \mathbf{623} \\ \underline{\mathbf{2}\bar{1}\bar{2}\,-} \\ \underline{\mathbf{435}} \end{array}$$

15 **5032 + 7489 – 2883 = 10$\bar{4}$38 = 9638.** हमने पहली व दूसरी संख्या के प्रथम अंक को जोड़ कर तीसरी संख्या के प्रथम अंक को घटाया। इसी तरह क्रमशः दूसरे, तीसरे, और चौथे अंक को।

16 $29 \times 3 = 3\bar{1} \times 3 = 9\bar{3} = 87$.

17 $87 \div 3 = 9\bar{3} \div 3 = 3\bar{1} = 29$.

18 41 ÷ 7 = 6 remainder $\bar{1}$.

ये शिरोरेखा संख्या अधिक अग्रिम कार्य में बहुत उपयोगी हो सकती है। (मार्ग दर्शिका 2 और 3 देखें)

अध्याय 10
विशेष गुणन

सारांश

10.1 11 से गुणा करना
10.2 पहले से एक अधिक – गुणा करने का विशेष तरीका
10.3 9 से गुणा करना
10.4 पहले से पहला और अंतिम से अंतिम – गुणा करने का विशेष तरीका
10.5 औसत का उपयोग करना –औसत से संख्याओं का गुणा करना
10.6 विशेष संख्या – गुणन–योग में विशेष संख्याओं के गुणक को चिन्हित करना

अगर किसी सवाल को करने के लिये सामान्य तरीके के बजाय कोई सरल रास्ता है तो उसे विशेष तरीका कहते हैं। उदाहरण के लिये 10 का गुणा करने के लिये लम्बे गुणन (Multiplication) तरीके का उपयोग नही करते हैं। वैदिक गणित में कई विशेष तरीके हैं जिनका प्रयोग आनन्द देते हैः वैदिक गणित में सामान्य तरीका तो हमेशा है ही लेकिन अगर आप ढूँढ़ पाये तो वहाँ अक्सर त्वरित रास्ता भी है।
मानसिक गणित को बढ़ावा देने में विशेष तरीके का काफी योगदान है। प्रत्येक व्यक्ति छोटा रास्ता पसन्द करता है चाहे वह एक जगह से दूसरी जगह जाने के लिये हो या विशेष गणना करने का सरल तरीका। जिन्दगी विशेष तरीको से भरपूर है । समान परिस्थिति को एक ही जैसे सुलझाना अधिकतर लोगों का काम करने का तरीका नहीं है। प्रत्येक गणित की गणना उत्तर के लिये एक अनोखे (Unique) तरीके को निमंत्रण देती है, हमें बच्चों को प्रत्येक प्रश्न के विशेष गुण को देखने के लिये प्रोत्साहित करना चहिये जिससे प्रश्न को ठीक से समझ कर आगे का अच्छा रास्ता ढूंढ़ सकें। यह निश्चित ही बुद्धिमत्तापूर्वक तरीके से गणित करने का रास्ता है।

10.1 11 से गुणा करना

11 के पहाड़े (Table) को याद करना सरल है और बड़ी संख्या को 11 से गुणा करना भी। अगर आप चाहते हैं, 52×11 आपको ग्यारह 52 चाहिए। इसका मतलब है आपको दस 52 और एक 52 या 520+52

$$\begin{array}{r} 520 \\ 52+ \\ \hline 572 \end{array}$$

ध्यान दें कैसे 2 और 5 बीच के कॉलम में जुड़ते हैं।.

1 **52 × 11** निकालें।

दो अंकों की संख्या जैसे 52, का 11 से गुणा करने के लिये आप उस संख्या को लिखें जिसमें 11 का गुणा करना है और इन दोनों अंकों के जोड़ को उनके बीच में लिखेंः **572** इसलिए **52 × 11 = 572**, 5 और 2 के बीच में आया 7, जो 5+2 है।

अभ्यास -A नीचे लिखे को 11 से गुणा करें:

a 23×11 **b** 61×11 **c** 44×11 **d** 50×11

---

a 253 b 671 c 484 d 550

और इसलिए हम अक्सर, जल्दी से बता सकते हैं अगर संख्या वास्तव में 11 से विभाजित हो सकती है।

2 क्या 473 , 11 से विभाजित है?

आप देख सकते हैं कि मध्य अंक दोनों बाहरी अंकों का योग हैं: $4 + 3 = 7$.

इसलिए संख्या 11 से विभाजित होती है।

आप उपर दिये गये उदाहरण में जानते हैं कि 473 को 11 से भाग देने पर
कितना प्राप्त होता है।
यह 43 होना चाहिए क्योंकि $43 \times 11 = 473$

केवल बाहर के दोनों तरफ के अंकों 4 और 3 को देखें।

अभ्यास -B नीचे दी गई तालिका को भरें.

संख्या	Tick if Divisible	No. of Times it Divides
242		
594		
187		
791		
693		

उत्तर: 22, 54, 17, -, 63

"गणित की सभी शाखाओं पर अनुप्रयोग करते हुए विद्यार्थियों को वैदिक गणित का संपूर्ण पाठ्यक्रम पूरा करने के लिए औसत 2 या 3 घंटे प्रतिदिन के हिसाब से कोई 8 या 12 माह लगते हैं, जबकि प्रचलित भारतीय व विदेशी विश्वविद्यालयों की पद्वति से कोई 15 या 20 वर्ष लगते हैं।"

वैदिक गणित से, पेज नं. xvii.

हांसिल

11 से गुणा करने को पीछे देखें, कभी–कभी वहाँ हांसिल हो सकता है, जैसा अगला उदाहरण दर्शाता है।

3 **58 × 11** निकालें।

5 और 8 यहाँ जोड़ने पर 13, इसलिए 1 को बायीं ओर ले जाते हैं:

58 × 11 = $5_{1}38$ = 638.

4 **47 × 11** निकालें।

4 और 7 यहाँ जोड़ने से 11 हुए, इसलिये फिर हांसिल 1 बायें ओर:

47 × 11 = $4_{1}17$ = 517.

अभ्यास -C इन्हें कोशिश करें:

a 68 × 11	**b** 79 × 11	**c** 47 × 11
d 86 × 11	**e** 55 × 11	**f** 93 × 11

a	**748**	**b**	**869**	**c**	**517**
d	**946**	**e**	**605**	**f**	**1023**

बड़ी संख्यायें

इस तरीके को आसानी से बड़ी संख्या के लिये बढ़ाया जा सकता है।

5 **234 × 11** निकालें।

इस तीन अंकों की संख्या को 11 से गुणा करने के लिये आप 234 के प्रथम व अन्तिम अंक को उत्तर में प्रथम व अंतिम अंक के जैसा रखें:

2 3 4

2 ? ? 4

तब दूसरे अंक के लिये आप संख्या 234 के प्रथम व द्वितीय अंक को जोड़ें, और तीसरे अंक के लिये 234 के अंतिम दो अंकों को:

$$\begin{array}{ccccccc} & 2 & & 3 & & 4 & \\ 2 & & 5 & & 7 & & 4 \end{array}$$

इसलिए **234 × 11 = 2574**.

अभ्यास -D नीचे दिये हुए को 11 से गुणा करें:

a	423 × 11	**b**	636 × 11	**c**	534 × 11
d	516 × 11	**e**	706 × 11	**f**	260 × 11
g	444 × 11	**h**	135 × 11	**i**	531 × 11

a	**4653**	**b**	**6996**	**c**	**5874**
d	**5676**	**e**	**7766**	**f**	**2860**
g	**4884**	**h**	**1485**	**i**	**5841**

जब आप प्रथम या अंतिम दो अंकों को जोड़ें, आपको दो अंकों की संख्या मिल सकती है, अतः वहाँ हांसिल है।

6 **777 × 11** निकालें।

उपर दिया हुआ तरीका देता है: $7_{1}4_{1}47$ = **8547**. हम केवल हांसिल को पहिले जैसा उपर ले जाते हैं।

अभ्यास -E 11 से गुणा करें:

a	384 × 11	**b**	629 × 11	**c**	888 × 11
d	555 × 11	**e**	393 × 11	**f**	939 × 11

a	**4224**	**b**	**6919**	**c**	**9768**
d	**6105**	**e**	**4323**	**f**	**10329**

इसे कितनी भी बड़ी संख्या के लिये बढ़ाया जा सकता है और 111,1111 से गुणा करने के लिये भी।

यह गुणा प्रतिशत के कार्य के लिए उपयोगी है क्योंकि अगर हम संख्या को 10 प्रतिशत से बढ़ाना चाहते हैं तो हम 1.1 से संख्या को गुणा करें, इसीतरह दूसरे प्रतिशत के लिये (देखे मेन्युअल 2 या कॉस्मिक केलकुलेटर, पुस्तिका 2)

10.2 पहले से एक अधिक (By one more than the one before)

यह गुणा करने का विशेष तरीका उन संख्याओं को गुणा करने के लिये है जिनका प्रथम अंक एक जैसा है व अंतिम अंक को जोड़ने पर 10,100 होता है।

उदाहरण के लिए, 52 × 58, जहाँ दोनों प्रथम अंक 5 और 2 + 8 = 10

7 मानाकि हम **43 × 47** को हल करना चाहते हैं, जिसमें दोनों संख्या 4 से शुरू होती है और अंतिम अंक (3 और 7) जुड़ने पर 10 हुए।
4 को इसके *एक अधिक* संख्या से गुणा करें: 4 × 5 = 20.

फिर, केवल अंतिम अंकों का गुणा करें: 3 × 7 = 21.

इसलिए **43 × 47 = 2021** जहाँ 20 = 4×5, 21 = 3×7

8 इसी तरह **62 × 68 = 4216** जहाँ 42 = 6×7, 16 = 2×8.

9 निकालें **204 × 206**.
यहाँ दोनों संख्याऐं 20 से शुरू होती हैं, और 4+6 =10, इसलिए तरीका लागू होता है.

204 × 206 = 42024 (420 = 20×21, 24 = 4×6).

अभ्यास -F नीचे दिये हुए का गुणा करें:

a 73 × 77 **b** 58 × 52 **c** 81 × 89 **d** 104 × 106

e 42 × 48 **f** 34 × 36 **g** 93 × 97 **h** 27 × 23

i 297 × 293 **j** 303 × 307

---

a 5621 b 3016 c 7209 d 11024
e 2016 f 1224 g 9021 h 621
i 87021 j 93021

10 **93 × 39** यहाँ ऐसा नहीं दिखता है कि यह किसी विशेष तरीके के अन्तर्गत आता है लेकिन अगर हम सूत्र *''अनुपात से''* *(Proportionately)* याद करें तो ध्यान आता है 93= 3×31, और 31 × 39 इस सूत्र के अन्तर्गत आता है:

31 × 39 = 1209 (हम 9 के बजाय 09 रखते हैं क्योंकि हमें दो अंक चाहिये)
इसलिए **93 × 39 = 3627** (1209 को 3 से गुणा करें)

पिछले उदाहरण में ध्यान देने की बात यह है कि इस तरीके से करने के लिये 39 को 31 की आवश्यकता है तब हम ढूँढ़ते हैं कि 93 = 3×31.

11 अंत में इस बारे में विचार करें **397 × 303**.

सिर्फ 3 दोनों संख्या के शुरू में वही है, लेकिन बची हुई संख्या (97 और 03) जुड़ कर 100 होती है।

इसलिए यह तरीका फिर लागू होता है, लेकिन इस बार हम चार अंक दाहिने तरफ उम्मीद करते हैं:

397 × 303 = 120291 जहाँ 12 = 3×4, 0291 = 97×3.

अभ्यास -G इन्हें गुणा करें:

a 64 × 38	**b** 88 × 46	**c** 33 × 74	**d** 66 × 28
e 36 × 78	**f** 46 × 54	**g** 298 × 202	**h** 391 × 309
i 795 × 705	**j** 401 × 499		

a	**2432**	**b**	**4048**	**c**	**2442**	**d**	**1848**
e	**2808**	**f**	**2484**	**g**	**60196**	**h**	**120819**
i	**560475**	**j**	**200099**				

10.3 9 से गुणा करना

वैदिक सूत्र *''पहले से एक कम'' (By One Less Than the One Before)*, जो कि *''पहले से एक अधिक'' (By One More than the One Before)* का उल्टा है यहाँ *''सभी 9 से और अंतिम 10 से''* के साथ आता है।

12 **763 × 999 = 762/237**.

जिस संख्या को हम 9 से गुणा कर रहें हैं उसे 1 से कम करते हैं : 763–1 = **762**. यह उत्तर का प्रथम भाग है।
तब सूत्र *''सभी 9 से और अंतिम 10 से''* को 763 में लगाने पर मिलता है 237, जो कि उत्तर का दूसरा भाग है।

13 **1867 × 99999 = 1866/98133**.
यहाँ, चूंकि 1867 में चार अंक हैं और 99999 में 5 अंक, हम 1867 को 01867 मानते हैं। इस 1 से कम करने पर मिला **1866** पहिले भाग के उत्तर के लिये।
तब सूत्र *''सभी 9 से ...''* 01867 को लगाने पर मिलता है **98133** दूसरे भाग के उत्तर के लिये।

अभ्यास -H निचे दिये हुए को हल करें:

a 89 × 99	**b** 82 × 99	**c** 19 × 99	**d** 45 × 99
e 778 × 999	**f** 7654 × 9999	**g** 79 × 999	**h** 124 × 9999
i 8989 × 99999	**j** 47 × 99999		

---

a 8811	**b 8118**	**c 1881**	**d 4455**
e 777222	**f 76532346**	**g 78921**	**h 1239876**
i 898891011	**j 4699953**		

10.4 पहले से पहला और अंतिम से अंतिम

गुणा जैसे 43 × 47 को निकालना सरल है क्योंकि पहिला अंक एक सा है और अंतिम अंक का जोड़ 10 है।

इसी तरह **27 × 87** भी सरल है क्योंकि **अंतिम अंक एक सा** है और **प्रथम अंक जुड़ कर 10** होता है।

यह सूत्र *''पहले से पहला और अंतिम से अंतिम'* (*The First by the First and the Last by the Last)* के अंतर्गत आता है।

14 **27 × 87 = 23/49**.

सूत्र की शर्त यहाँ पूरी होती है जैसे 2 + 8 = 10
और अन्त के दोनों अंक 7 हैं।

इसलिये **हम संख्या के प्रत्येक पहिले अंक को गुणा कर, अंतिम अंक को जोड़ते हैं:** 2 × 8 = 16, 16 + 7 = **23** जो उत्तर का प्रथम भाग है।

अंतिम के अंकों को आपस में गुणा किया: 7×7 = **49**: जो कि उत्तरका अंतिम भाग है।

15 **69 × 49 = 3381**.

इसमें **33** = 6×4 + 9, और **81** = 9×9.

अभ्यास -I नीचे दिये हुए को इस तरीके से गुणा करें:

a 38 × 78	**b** 26 × 86	**c** 91 × 11	**d** 59 × 59

e 63 × 43 **f** 24 × 84 **g** 88 × 28 **h** 29 × 89

i 97 × 17 **j** 64 × 44

अगर आप सूत्र *''अनुपात से''* (*Proportionately*) का प्रयोग करते हों तो नीचे लिखे को इस तरह से किया जा सकता है:

k 31 × 42 **l** 46 × 83 **m** 93 × 71 **n** 88 × 32

a	**2964**	**b**	**2236**	**c**	**1001**	**d**	**3481**
e	**2709**	**f**	**2016**	**g**	**2464**	**h**	**2581**
i	**1649**	**j**	**2816**				
k	**1302**	**l**	**3818**	**m**	**6603**	**n**	**2816**

10.5 औसत का उपयोग करना

यहाँ हम औसत का उपयोगकर एक साफ व सरल तरीका गुणा करने का देखते हैं। यह सूत्र *'' एक को पूर्ण व पूर्ण को एक मानकर ''* (*Specific General*) के अन्तर्गत आता है।

16 माना कि हम **29 × 31** का गुणा करना चाहते हैं।
चूंकि 29 और 31 का औसत 30 है, हम सोच सकते हैं कि 29 × 31 है 30 × 30, या इसके पास।
वास्तव में 29 × 31 = **899**
और यह 900 से सिर्फ एक कम है

17 अब **28 × 32** पर विचार करें। यहाँ फिर औसत 30 है। 28 × 32 = **896** और यह 4 कम है।

18 **27 × 33** जिनका औसत भी 30: 27 × 33 = **891**, जो कि 900 से 9 कम है।

वास्तव में नियम है।

औसत का वर्ग निकालें और उसमें से, औसत से दोनों में से किसी भी एक संख्या के अंतर के वर्ग को घटायें।

19 इसलिए **26 × 34** = $30^2 - 4^2$ = 900 – 16 = **884**.

और **58 × 62** = $60^2 - 2^2$ = 3600 – 4 = **3596**.

इसी तरह **94 × 106** = $100^2 - 6^2$ = 10,000 – 36 = **9964**.

और **37 × 33** = $35^2 - 2^2$ = 1225 – 4 = **1221**. अध्याय 12.1 देखें, उन संख्या के वर्ग के लिये जिन के अन्त में 5 हो।

यह तरीका किन्ही दो संख्याओं के गुणा करने के लिये है। अगर औसत बहुत आकर्षक नहीं भी है तब भी यह तरीका दो संख्याओं का गुणा करने से अक्सर अच्छा है। उदाहरण के लिये, 67 × 69 का गुणा करने के बजाय $68^2 - 1$ निकालना सरल है, बजाय 67 × 69 के गुणा करने से।

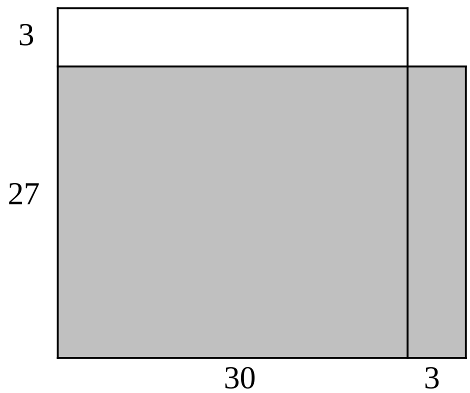
अभ्यास -**J** निकालें:

a 49 × 51	**b** 27 × 33	**c** 57 × 63	**d** 64 × 66
e 85 × 65	**f** 55 × 95	**g** 33 × 47	**h** 91 × 99
i 44 × 48	**j** 43 × 47	**k** 74 × 86	**l** 98 × 102
m 62 × 38	**n** 48 × 72	**o** 73 × 93	**p** 196 × 204

a 2499	**b 891**	**c 3591**	**d 4224**
e 5525	**f 5225**	**g 1551**	**h 9009**
i 2112	**j 2021**	**k 6364**	**l 9996**
m 2356	**n 3456**	**o 6789**	**p 39984**

प्रमाण

27 × 33 के लिये रेखा गणित से स्पष्टीकरण नीचे दिया है



छायांकित आयत 27 ×33 का है और इसका क्षेत्रफल 27×33 है।
आरोपित आकार 30×30 का वर्ग है।
यह बताता है कि वर्ग जिसका क्षेत्रफल 30^2 है वह चाहे गये आयत से 3^2 इकाई बड़ा है, क्योंकि उपर का आयत 30 × 3 , और दाईं ओर का आयत 27 × 3, अन्तर 3 ×3 का।

यहाँ बीजगणितीय प्रमाण।

$\mathbf{(a + b)(a - b) = a^2 - b^2}$, जहाँ a औसत और b प्रत्येक संख्या का औसत से अन्तर। इसलिए (a + b) बड़ी संख्या है और (a – b) छोटी संख्या।

10.6 विशेष संख्याऐं

पुनरावृति संख्याऐं

कुछ गुणन विशेष रूप से सरल होते हैं।

20 **23 × 101 = 2323.**

23 को 101 से गुणा करने के लिये हमें 23 सौ (23×100) और 23 एक (23×1) चाहिए जिससे हमें मिलता है 2323

2 अंक की संख्या को 101 से गुणा करने का असर होता है कि उस संख्या को दो बार लिखें।

]

21 इसी तरह **69 × 101 = 6969.**

और **473 × 1001 = 473473.**

यहाँ तीन अंकों की संख्या को 1001 से गुणा करने पर तीन अंक उत्तर में दो बार आते हैं।

22 **47 × 1001 = 47047.**

यहाँ, क्योंकि हम 47 को 1001 से गुणा करना चाहते हैं, हम 47 को 047
जैसा सोच सकते हैं।
इसलिए हमें मिला 047047, या केवल 47047

23 **123 × 101** = $123_{1}23$ = **12423.**

यहाँ हमारे पास 12300 + 123 है, इसलिए 1 हांसिल बाई ओर जोड़ें।

24 **28 × 10101 = 282828.**

अभ्यास -K इन्हें करें:

a 46 × 101 **b** 246 × 1001 **c** 321 × 1001

d 439 × 1001 **e** 3456 × 10001 **f** 53 × 10101

g 74 × 1001　　**h** 73 × 101　　**i** 29 × 1010101

j 277 × 101　　**k** 521 × 101　　**l** 616 × 101

a 4646	**b 246246**	**c 321321**
d 439439	**e 34563456**	**f 535353**
g 74074	**h 7373**	**i 29292929**
j 27977	**k 52621**	**l 62216**

इस तरह के गुणा सूत्र *''केवल देखने से'* (*By Mere Observation*) के अंतर्गत आते हैं।
101 से गुणा करना प्रतिशत के कार्य मे उपयोगी है, जैसे किसी संख्या को एक प्रतिशत से बढ़ाने के लिए हम 1.01 से गुणा करते हैं। (देखें मेन्युअल 2 या कॉस्मिक केल्कुलेटर बुक 2)

अनुपात से

25 **43 × 201 = 8643**.

यहाँ हम सूत्र *''अनुपात से'* (*Proportionately*) लेते हैं क्योकि हम 101 के बजाय, 201 से गुणा करते हैं। इसलिये पहिले हम 43 का दुगना रखते हैं (जो 83 है) व तब 43।

26 **31 × 10203 = 316293** तब हमारे पास 31×1, 31×2, 31×3.

अभ्यास -L इन्हें करें:

a 54 × 201　　**b** 32 × 102　　**c** 333 × 1003　　**d** 41× 10201　　**e** 33 × 30201

f 17 × 20102　　**g** 13 × 105　　**h** 234 × 2001　　**i** 234× 1003　　**j** 43 × 203

a 10854	**b 3264**	**c 333999**	**d 418241**	**e 996633**
f 341734	**g 1365**	**h 468234**	**i 234702**	**j 8729**

डिसगाइज (छद्म–क्रिया)

अब यह भी संभव है कि सवाल उपर की तरह हो लेकिन स्पष्ट तौर पर नहीं लग रहा हो वह छिपा हो सकता है।

अगर हम इन कुछ विशेष संख्याओं (जैसे 1001,203 आदि) के गुणक को जानते हैं तो सवाल को बहुत सरल बना सकते हैं।

माना कि उदाहरण के लिये आप जानते हैं कि **3 × 67 = 201**

27 **93 × 67 = 6231**.

चूंकि $3 \times 67 = 201$,

इसलिये $93 \times 67 = 31 \times (3 \times 67)$

$= 31 \times 201$

$=$ **6231**.

दूसरे शब्दों में हम पहचानते हैं कि विशेष संख्या (201 इस स्थिति में) इस सवाल में निहित है (जैसे 3×67)

अब माना कि हम जानते हैं कि **3 × 37 = 111.**

28 **24 × 37 = 888**.

हम जानते हैं कि $3 \times 37 = 111$, ऐसी संख्या है जिसका गुणा करना बहुत सरल है। इसलिए $24 \times 37 = 8 \times (3 \times 37)$

$= 8 \times 111$

$=$ **888**.

और $19 \times 21 = 399 = 40\bar{1}$.

29 **38 × 63 = 2394**.

क्योकि $38 \times 63 = 2 \times 19 \times 3 \times 21 = 6 \times (19 \times 21) = 6 \times 40\bar{1} = 240\bar{6} =$ **2394**.

अगर हम इन विशेष संख्या के गुण को जानते हैं तो हम इनका अच्छा उपयोग कर सकते हैं जब भी वे सवाल में मौजूद हों और वे अक्सर दिखाई देते हैं।

नीचे इनमें से कुछ संख्या की सूची उनके गुणक के साथ है:

67 × 3 = 201	**17 × 6 = 102**	**11 × 9 = $10\bar{1}$**
43 × 7 = 301	**13 × 8 = 104**	**19 × 21 = $40\bar{1}$**
7 × 11 × 13 = 1001	**29 × 7 = 203**	**23 × 13 = $30\bar{1}$**
3 × 37 = 111	**31 × 13 = 403**	**27 × 37 = $100\bar{1}$**

62 × 39 = 2418.

हम देखें 31 × 13 सवाल में निहित है:

$$
\begin{aligned}
62 \times 39 &= 2\times31 \times 3\times13 \\
&= 2\times3 \times 31\times13 \\
&= 6 \times 403 \\
&= \mathbf{2418}.
\end{aligned}
$$

अभ्यास -M हल करने के लिये विशेष संख्या का उपयोग करें:

a 29 × 28	**b** 35 × 43	**c** 67 × 93	**d** 86 × 63
e 77 × 43	**f** 26 × 77	**g** 34 × 72	**h** 57 × 21
i 58 × 63	**j** 26 × 23	**k** 134 × 36	**l** 56 × 29
m 93 × 65	**n** 54 × 74	**o** 39 × 64	**p** 51 × 42

---

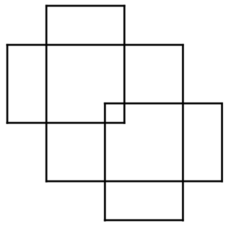
a	**812**	**b**	**1505**	**c**	**6231**	**d**	**5418**
e	**3311**	**f**	**2002**	**g**	**2448**	**h**	**1197**
i	**3654**	**j**	**598**	**k**	**4824**	**l**	**1624**
m	**6045**	**n**	**3996**	**o**	**2496**	**p**	**2142**

"वैदिक पद्धति में यही सब तथ्य अन्य बड़े रूचिकर गुण हैं जो कि बच्चों के लिये भी गणित को प्रचलित तथा थकाऊ पद्धति वाले चरित्र से उबार कर उसे उसके सच्चे चरित्र अर्थात् आनन्ददायक मनोरंजन तथा हर्ष कारक चरित्र की ओर ले जाते हैं।"
वैदिक गणित से, पेज नं. 239.

अध्याय 11
सामान्य गुणा करना

सारांश

11.1 पुनरीक्षण
11.2 दो अंकों की संख्याऐं – दो अंकों की संख्या को एक लाईन में, बायें से दायेंगुणा करना।
11.3 गुणक खिसकाकर – बड़ी संख्या को 2 अंकों की संख्या से गुणा
11.4 विस्तार – 3 अंकों की संख्या का गुणा करना।
11.5 द्विपद का गुणा करना – वैसे ही पेटर्न का उपयोग कर।
11.6 3 अंकों का गुणा करना – पिछले पेटर्न का विस्तार।
11.7 लिखित गणना – बायें से दायें।



11.1 पुनरीक्षण

हमने कई तरीके गुणा करने के देखे लेकिन वे सभी विशेष प्रकार के लिये थे, जहाँ कुछ विशेष शर्त जरूरी थी, जैसे उदाहरण के लिये दोनों संख्याऐं 100 के पास।
हम अब सामान्य गुणा करने की तकनीक पर आते हैं, जिससे कोई भी दो सख्याओं को एक लाईन में, केवल मानसिक अंकगणित से कर सकते हैं।

पहले हम संक्षिप्त पुनरीक्षण करें कि एक अंक की संख्या को कैसे गुणा किया (जैसा अध्याय 4.2) आप चाहें तो मानसिक के बजाय लिखित गणना से शुरू कर सकते हैंः अगर ऐसा है तो अध्याय 11.7 पर जाये, लेकिन अध्याय 11.2, 11.3, 11.6 में वर्णित तरीके आपको लगेंगे।

1 **74 × 8** हल करें

हम 74 के प्रत्येक अंक को 8 से बायें से शुरू करते हुए गुणा करें:

7 × 8 = **56** और 4 × 8 = **32.**
56 के 6 और 32 के 3 को एक साथ करें (6+3=9) 56,32 = 592.

अन्दर के अंको को एक साथ विलय (Merged) कर दिया। इसलिए **74×8 = 592.**

2 **827 × 3** हल करें

तीन गुणनफल हैं **24, 6, 21**
पहले व दूसरे गुणनफल को एक साथ: 24,6 = 246 यहाँ कोई हांसिल नहीं क्योंकि 6, एक अंक है, तब 246 को 21 से संयुक्त किया: 24 6,21 = 2481. इसलिए **827 × 3 = 2481**

3 **77 × 4** हल करें

संख्या के दोनो अंकों का अलग–अलग गुणा **28**, **28** हैं

और 28,28 = 308 (28 बढ़कर 30 दो जोड़ने पर). इसलिए **77 × 4 = 308**.

अभ्यास -A इन्हें मानसिक स्तर पर गुणा करें:

a 73 × 3	**b** 63 × 7	**c** 424 × 4	**d** 777 × 3
e 654 × 3	**f** 717 × 8	**g** 876 × 7	

---

a 219 **b 441** **c 1 696** **d 2 331**
e 1 962 **f 5 736** **g 6 132**

11.2 दो अंक संख्यायें

सूत्र *''सीधे (खड़े) और तिरछे'* (*Vertically and Crosswise)* दोनों प्रकार से हमें किसी भी संख्या को गुणा करने का स्वरूप देता है। 2 अंक की संख्या के लिये यह इस प्रकार है।

4 **21 × 23** हल करें

संख्याओं को एक दूसरे के नीचे जमाने का सोचें:

$$\begin{array}{r} 2\ 1 \\ 2\ 3\times \\ \hline 4\,8\,3 \\ \hline \end{array}$$

यहाँ तीन चरण (Step) हैं

A. बायें तरफ के कालम में खड़े
गुणा करे: 2 × 2 = **4,**
इसलिए पहिला उत्तर 4 है।

$$\begin{array}{ll} 2 & 1 \\ 2 & 3\ \times \\ \hline 4 & \\ \hline \end{array}$$

B. तिरछे गुणाकर जोड़ें:
2 × 3 = 6,
1 × 2 = 2, 6 + 2 = **8,**
इसलिए 8 उत्तर का बीच का अंक।

$$\begin{array}{ll} 2 & 1 \\ & \times \\ 2 & 3\ \times \\ \hline 4 & 8 \\ \hline \end{array}$$

C. दाहिने कालम में खड़े
गुणा: 1 × 3 = **3,**
3 उत्तर का अन्तिम अंक है।.
(ध्यान दें गुणा बायें से दायें कर रहे हैं)

$$\begin{array}{ll} 2 & 1 \\ 2 & 3\ \times \\ \hline 4 & 8\,3 \\ \hline \end{array}$$

5 **14 × 21** हल करें

```
1   4
2   1 ×
2 9 4
```

A: खड़े बायें तरफ: 1 × 2 = **2**,

B: तिरछा: 1 × 1 = 1, 4 × 2 = 8 और 1 + 8 = **9**,

C: खड़े दाहिने तरफ 4 × 1 = **4**.

यह जरूर सरल, सीधा और केवल मानसिक (दिमागी) अंकगणित है। हमें अब इस *''सीधे (खड़े) और तिरछे''* (*vertical and crosswise*) तरीके का अभ्यास करके तरीके को सिद्व करना चाहिए।

अभ्यास -B दिमागी स्तर पर गुणा करें:

a 2 2	**b** 2 1	**c** 2 1	**d** 2 2	**e** 6 1	**f** 3 2	**g** 3 1	**h** 1 3
3 1 ×	3 1 ×	2 2 ×	1 3 ×	3 1 ×	2 1 ×	3 1 ×	1 3 ×

a	**682**	b	**651**	c	**462**	d	**286**
e	**1 891**	f	**672**	g	**961**	h	**169**

हांसिल

पिछले उदाहरण में हांसिल का अंक नही था, इसलिये इसे हम आगे देखते हैं।

6 **23 × 41** हल करें

```
2   3
4   1 ×
9 4 3
```

तीन चरण (Step) हमें देते हैं:   2 × 4 = **8**,

2 × 1 + 3 × 4 = **14**

3 × 1 = **3**

यहाँ 14 में हांसिल का अंक है, इसलिये उत्तर पूरा करने के लिये हम संख्याओं को विलय (merge) दिमागी स्तर पर पहले की तरह करते हैं।

दिमागी तौर पर चरण (Step) है: 8

8,14 = 94 (एक हांसिल बायें ले गए)

94,3 = 943

इसलिए **23 × 41 = 943**.

7 **23 × 34** हल करें

```
  2   3
  3   4×
  7 8 2
```

चरण (Step) है:

6

6,17 = 77

7 7,12 = **782**

8 **33 × 44** हल करें

```
  3   3
  4   4×
1 4 5 2
```

चरण (Step) है:

12

12,2 4 = 144

14 4,12 = **1452**

अब आप किसी 2–अंकों की संख्या को एक लाईन में गुणा कर सकते हैं।

अभ्यास **-C** दिमागी स्तर पर नीचे दिये हुए को गुणा करें:

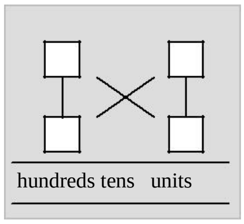
a 2 1	**b** 2 3	**c** 2 4	**d** 2 2	**e** 2 2	**f** 3 1
4 7	4 3	2 9	2 8	5 3	3 6
g 2 2	**h** 3 1	**i** 4 4	**j** 3 3	**k** 3 3	**l** 3 4
5 6	7 2	5 3	8 4	6 9	4 2
m 3 3	**n** 2 2	**o** 3 4	**p** 5 1	**q** 3 5	**r** 5 5
3 4	5 2	6 6	5 4	6 7	5 9
s 5 4	**t** 5 5	**u** 4 4	**v** 4 5	**w** 4 8	**x** 3 4
6 4	6 3	8 1	8 1	7 2	1 9

a	**987**	**b**	**989**	**c**	**696**	**d**	**616**	**e**	**1 166**	**f**	**1 116**
g	**1 232**	**h**	**2 232**	**i**	**2 332**	**j**	**2 772**	**k**	**2 277**	**l**	**1 428**
m	**1 122**	**n**	**1 144**	**o**	**2 244**	**p**	**2 754**	**q**	**2 345**	**r**	**3 245**
s	**3 456**	**t**	**3 465**	**u**	**3 564**	**v**	**3 645**	**w**	**3 456**	**x**	**646**

आपने इस उदाहरण में पाया होगा कि आप शुरू में तिरछे गुणा करना चुनते हैं और बाद में बांऐ व दायें खड़े गुणा कर रखने को।

स्पष्टीकरण

यह तरीका कैसे कार्य करता है यह समझना सरल है। खड़े गुणा करना इकाई की संख्या को इकाई की संख्या से गुणाकर इकाई की संख्या का उत्तर देता है। तिरछे गुणा करने की प्रक्रिया से दसवे स्थान के अंक का इकाई के अंक से और इकाई के अंक का दसवें स्थान के अंक से गुणा कर दहाई की संख्या मिलती है और बायें खड़े गुणा से दसवे स्थान के अंक का दसवें स्थान के अंक से गुणा होने से हमें सैकड़े की संख्या मिलती है।



इसलिए यह गुणा करने का सरल तरीका जो कि सभी जगह उपयोग में आता है, समझने में भी सरल है। इसे बायें से दायें या दायें से बायें भी किया जा सकता है। (अनुभाग 11.7 देखें) यह बीजगणित में बिल्कुल इसी तरह काम आता है, (देखें अनुभाग 11.5) और इसे उल्टा करने पर साधारण भाग का तरीका हो जाता है। (देखें अनुभाग 16.4)

पहिले दिये विशेष तरीके का स्पष्टीकरण

हम अब अनुभाग 10.2 में सूत्र *''पहले से एक अधिक के द्वारा'* (*One More than the One Before*) के अन्तर्गत बताये गुणा करने के विशेष तरीके को स्पष्ट करते हैं जैसे 72 × 78 जिसमें पहिला अंक समान है और अंतिम अंक का जोड़ 10 है।

72 × 78 के लिये वर्तमान सूत्र का उपयोग करें:

$$\begin{array}{r} 7\,2 \\ 7\,8 \\ \hline 5\,6\,{}_{7}1\,{}_{1}6 \\ \hline \end{array}$$

हम देखते है कि तिरछा गुणा करने पर आठ '7' और दो '7' मतलब दस '7' या 70 शून्य यहाँ सुनिश्चित करता है कि दो अंकों का गुणा 2 × 8 = 16 अंतिम दो स्थान पर ही आयेगा और ऐसा हमेशा होगा जब इस तरह की संख्याओं का गुणा करेंगे। 70 में '7' का मतलब बायें में एक स्थित अतिरिक्त ''7'' इसलिए वहाँ कुल आठ ''7'' हैं।

जिन संख्याओं के अंत में 5 है, उनका वर्ग करने का तरीका, इस तरीके का विशेष रूप है।

11.3 गुणक को खिसकाकर

किसी बड़ी संख्या को एक अंक से गुणा करने में जैसे 4321 × 2, हम लम्बी संख्या के प्रत्येक अंक को 2 से गुणा करते हैं। हम इसे इस तरह सोच सकते हैं कि, 2 एक कतार में आगे बढ़ रहा है, उपर के प्रत्येक अंक को खड़े गुणा करते हुए।

9 **4321 × 32** हल करें

4 3 2 1 इसी तरह हम यहाँ 32 को बायें किनारे पर रखते हैं।
3 2 तब बांई और खड़े गुणा करने पर, 4 × 3 = **12**.
और तिरछा, 4×2 +3×3 = **17**.

4 3 2 1 अब 32 को बढ़ाये और तिरछे गुणा करें:
3 2 3×2 + 2×3 = **12**.

4 3 2 1 32 को एक बार और आगे बढ़ाया:
3 2 तिरछा गुणा, 2×2 + 1×3 = **7**.
अंत में दाई तरफ खड़े गुणा है 1×2 = **2**.

इन 5 परिणाम (बड़े अक्षरों में)12,17,12,7,2 जैसे प्राप्त हुए हैं मानसिक स्तर पर सामान्य तरीके से एक साथ किया:

12,17 = 137

137,12 = 1382

1382,7,2 = **138272**

इसलिए हम प्रत्येक स्थिति में तिरछे गुणा करते हैं, लेकिन शुरू व अंत में खड़े भी गुणा करते हैं।

10 **31013 × 21** हल करें

यहाँ 21 की स्थिति इस तरह है:

3 1 0 1 3	**3 1 0 1 3**	**3 1 0 1 3**	**3 1 0 1 3**
2 1	**2 1**	**2 1**	**2 1**

6 दिमागी स्टेप से मिलते हैं: 6,5,1,2,7,3
इसलिए उत्तर है **651273**.

अभ्यास -D गुणक को खिसकाने का उपयोग कर गुणा करें:

a 3 2 1 × 2 1	**b** 3 2 1 × 2 3	**c** 4 2 1 × 2 2	**d** 3 2 1 × 4 1
e 1 2 1 2 × 2 1	**f** 1 3 3 1 × 2 2	**g** 1 3 1 3 × 3 1	**h** 1 1 2 2 1 × 2 2

a 6 741 **b** 7 383 **c** 9 262 **d** 13 161
e 25 452 **f** 29 282 **g** 40 703 **h** 246 862

11.4 विस्तार

11 **123 × 132**हल करें

```
  1 2 3
  1 3 2 ×
---------
1 6 2 3 6
```

सूत्र *''सीधे (खड़े) ओर तिरछे''* (*Vertically and Crosswise*) का विस्तार निम्न उदाहरण को हल करने के लिए कर सकते हैं, लेकिन पीछे दिए गये तरीके से भी इसे हल किया जा सकता है।

हम उपर दी गई संख्या को विभाजित कर सकते हैं 12 / 3 और 13 / 2 में जैसे वे दोनो एक एक अंक हैं।

```
  12   3
  13   2
---------
 162 3 6
```

खड़े 12 × 13 = **156**,
खड़े–तिरछे 12 × 2 + 3 × 13 = **63**,
खड़े 3 × 2 = **6**.

इनको मानसिक स्तर पर एक साथ करने पर हमें मिला: 156
156,6 3 = 1623
1623,6 = **16236**

अभ्यास -E इनको दो अंक मानते हुए गुणा करें:

a 1 1 2
2 0 3

b 1 2 3
1 3 1

c 1 2 3
1 2 2

d 1 1 2
1 2 3

e 4 2 1
2 2

a **22 736** **b** **16 113** **c** **15 006**
d **13 776** **e** **9 262**

12 **304 × 412 = 125248**.

यहाँ हम प्रथम अंक के बाद की संख्या को विभाजित करने का निर्णय लें: 3/04 × 4/12.

```
  3    04
  4    12
----------
 12  52 48
```

जब हम संख्या को इस तरह विभाजित करते हैं उत्तर **एक समय में दो अंकों** में होता है

पेटर्न के तीन प्रकार के चरण हैं: 3×4 = **12**,
3×12 + 4×4 = **52**,
4×12 = **48**.

यह उत्तर में 3 जोड़ो की संख्या देता है।

अभ्यास -F अंकों के जोड़ो का (pairs) का उपयोग कर गुणा करें:

a 211 × 304	**b** 307 × 407	**c** 203 × 432	**d** 211 × 311
e 504 × 504	**f** 501 × 501	**g** 712 × 112	**h** 703 × 211

a	**64 144**	**b**	**124 949**	**c**	**87 696**	**d**	**65 621**
e	**254 016**	**f**	**251 001**	**g**	**79 744**	**h**	**148 333**

11.5 द्विपद का गुणा करना

वैदिक प्रणाली में हमारे पास अंकों को गुणा करने के लिये अलग व बीजगणितीय व्यंजकों को गुणा करने के लिये अलग तरीके नही हैं। एक ही पेटर्न *''सीधे (खड़े) और तिरछे''* (*Vertically and Crosswise*) दोनो के लिए उपयोग कर सकते हैं।

13 गुणा करें: **(x + 3)(x + 4)**.

हमें गुणा करना है x+3 को x+4 से।
इसका मतलब है कि x+3 के दोनो x और 3गुणा करते है, x और 4 को, x+4 में इसे करने का अच्छा रास्ता है *''सीधे (खड़े) ओर तिरछे''* (*Vertically and Crosswise)* तरीके का उपयोग है।

प्रथम द्विपद को दूसरे के नीचे लिखें:

बाऐं खड़े गुणा करें: $x \times x =$ **x^2**.

आड़े गुणा करें और जोड़ें $4 \times x + 3 \times x =$ **7x.**
दांऐ खड़े गुणा करें: $3 \times 4 =$ **12.**

$$\begin{array}{ccc} x & + & 3 \\ x & + & 4 \\ \hline \multicolumn{3}{c}{x^2 + 7x + 12} \end{array}$$

यह बिल्कुल 2 अंकों के गुणा करने जैसा है।
गुणा बायें से दायें या दायें से बायें करें जैसा भी पसन्द हो।

अभ्यास -G गुणा करें:

a $(x + 5)(x + 6)$ **b** $(x + 2)(x + 9)$ **c** $(x + 10)(x + 1)$ **d** $(x + 20)(x + 20)$

e $(x + 1)(x + 1)$ **f** $(x + 22)(x + 28)$ **g** $(y + 52)(y + 4)$ **h** $(x + 4)^2$

a	**$x^2+11x+30$**	**b**	**$x^2+11x+18$**	**c**	**$x^2+11x+10$**	**d**	**$x^2+40x+400$**
e	**x^2+2x+1**	**f**	**$x^2+50x+616$**	**g**	**$y^2+56y+208$**	**h**	**$x^2+8x+16$**

14 गुणा करें **(2x + 5)(3x + 2)**.

$$\begin{array}{ll} 2x & +5 \\ 3x & +2 \\ \hline 6x^2 + 19x + 10 & \end{array}$$

बायें को खड़े: $2x \times 3x =$ $\mathbf{6x^2}$.
आड़े: $4x+15x =$ **19x**.
दायें को खड़े : $5 \times 2 =$ **10**.

15 गुणा करें**(x + 3y)(5x + 7y)**.

$$\begin{array}{ll} x & +3y \\ 5x & +7y \\ \hline 5x^2 + 22xy + 21y^2 & \end{array}$$

बायें को: $x \times 5x =$ $\mathbf{5x^2}$.
आड़े: $7xy + 15xy =$ **22xy**.
दायें को: $3y \times 7y =$ $\mathbf{21y^2}$.

अभ्यास -H नीचे दिये हुए को गुणा करें:

a (2x + 5)(x + 4) **b** (x + 8)(3x + 11) **c** (2x + 1)(2x + 20) **d** (2x + 3)(3x + 7)

e (4x + 3)(x + 6) **f** (3x + 17)(3x + 4) **g** (6x + 1)(5x + 1) **h** (2x + 5)(4x + 5)

i (3x + 3)(4x + 5) **j** (2x + 3y)(2x + 5y) **k** (5x + 2y)(2x + 5y) **l** (4x + 3y)(7x + y)

a	$\mathbf{2x^2+13x+20}$	**b**	$\mathbf{3x^2+35x+88}$	**c**	$\mathbf{4x^2+42x+20}$	**d**	$\mathbf{6x^2+23x+21}$
e	$\mathbf{4x^2+27x+18}$	**f**	$\mathbf{9x^2+63x+68}$	**g**	$\mathbf{30x^2+11x+1}$	**h**	$\mathbf{8x^2+30x+25}$
i	$\mathbf{12x^2+27x+15}$	**j**	$\mathbf{4x^2+16xy+15y^2}$	**k**	$\mathbf{10x^2+29xy+10y^2}$	**l**	$\mathbf{28x^2+25xy+3y^2}$

इसलिए, मौजूद प्रणाली से भिन्न, हम एक ही गुणा करने के तरीके को बीजगणित व अंक गणित में उपयोग करते हैं।

आगे ऋणात्मक संख्या को एक साथ करने के तरीकों का उपयोग करने की आवश्यकता है

16 गुणा करें **(2x – 3)(3x + 4)**.
यह बहुत समान है।
$2x \times 3x =$ $\mathbf{6x^2}$.
आड़े: $8x - 9x = -1x$ or **–x**.
और $-3 \times 4 =$ **–12**.

$$\begin{array}{ll} 2x & -3 \\ 3x & +4 \\ \hline 6x^2 & -x-12 \end{array}$$

17 **(x – 3)(x – 6)** निकालें/हल करें

खड़े: $x \times x =$ $\mathbf{x^2}$.
आड़े: $-6x - 3x =$ **–9x**.
खड़े: $-3 \times -6 =$ **+18**.

$$\begin{array}{ll} x & -3 \\ x & -6 \\ \hline x^2 - 9x + 18 & \end{array}$$

अभ्यास -I गुणा करें:

a $(x + 3)(x - 5)$ **b** $(x + 7)(x - 2)$ **c** $(x - 4)(x + 5)$ **d** $(x - 5)(x - 4)$

e $(x - 3)(x - 3)$ **f** $(2x - 3)(x + 4)$ **g** $(2x - 3)(3x + 6)$ **h** $(3x - 1)(x + 7)$

---

a $x^2-2x-15$ **b** $x^2+5x-14$ **c** x^2+x-20 **d** $x^2-9x+20$
e x^2-6x+9 **f** $2x^2+5x-12$ **g** $6x^2+3x-18$ **h** $3x^2+20x-7$

अंक जोड़ जाँच

बीजगणित शैली में भी अंक जोड़ जाँच का उपयोग कर सकते हैं।
अगर उदाहरण के लिये हम उपर के प्रश्न 14 को जाँचना चाहते हैं: $(2x + 5)(3x + 2) = 6x^2 + 19x + 10$
हम जाँचते हैं कि गुणक के जोड़ का गुणा जो बायें और कोष्ठक में है, वो दायें और के गुणक के जोड़ के बराबर है।

वह है $(2 + 5)(3 + 2) = 6 + 19 + 10$.
चूंकि दोनों और 35 हुआ यह उत्तर सही होने की पुष्टि करता है।

11.6 तीन अंकों की संख्याओं का गुणा करना

18 हल करें **504 × 321**.

$$\begin{array}{ccc} 5 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ \hline \multicolumn{3}{c}{161784} \end{array}$$

तीन अंको की संख्याओं का गुणा करने का विस्तारित स्वरूप इस तरह है।

A बायें को खड़े, 5×3 = **15**.

$$\begin{array}{ccc} 5 & 0 & 4 \\ | & & \\ 3 & 2 & 1 \\ \hline \multicolumn{3}{l}{15} \end{array}$$

B तब बायें को आड़े ,
5×2 + 0×3 = 10.
15 और 10 को पहले की तरह संयुक्त करें:
15,10 = **160**.

$$\begin{array}{ccc} 5 & 0 & 4 \\ & \times & \\ 3 & 2 & \\ \hline \multicolumn{3}{l}{160} \end{array}$$

C हम बाद में तीनों गुणनफल लेकर उन्हें जोड़ें ,
5×1 + 0×2 + 4×3 = 17. और 160,17 = **1617**.
(वास्तव में हम सैकड़ा की सभी संख्याओं को इकट्ठा कर रहे हैं। एक साथ करने के लिए गुणा करके जोड़ें, सैंकड़े को ईकाइ अंक से दहाई को दहाई से और इकाई को सैकड़े के अंक से)।

$$\begin{array}{ccc} 5 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ \hline \multicolumn{3}{l}{1617} \end{array}$$

D आगे हम तिरछे गुणा करें दाहिने तरफ

0×1 + 4×2 = 8: 1617,8 = **16178**.

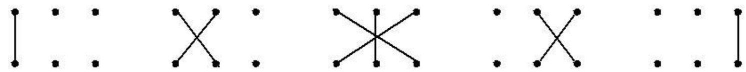
```
 5  0  4
       ×
 3  2  1
16178
```

E अंत में, दायें को खड़े, 4×1 = 4:
16178,4 = **161784**.

```
 5  0  4
       |
 3  2  1
161784
```

पाँच चरण की समरूपता पर ध्यान दें:
पहले वहाँ 1 गुणा, फिर 2, फिर 3, फिर 2 और फिर 1

हम इन चरण को संक्षेप में नीचे दिये अनुसार दिखा सकते हैं:



A **B** **C** **D** **E**

19 हल करें **321 × 321**.

```
 3 2 1
 3 2 1 ×
103041
```

5 परिणाम हैं 9,12,10,4,1.
मानसिक स्टेप हैं 9

9,12 = 102
10 2,10 = 1030

1030,4,1 = 103041

कभी–कभी कैसे गुणा करना इसका विकल्प हमारे पास होता है।

2 **123 × 45** हल करें

इसे गुणक खिसकाने के तरीके से या 123 में 12 को एक अंक मानकर छोटे *''सीधे (खड़े) और तिरछे''* *(vertical and crosswise pattern)*, से किया जा सकता है।
वैकल्पिक तरीके से, हम 45 की जगह 045 रखकर विस्तारित *''सीधे (खड़े) ओर तिरछे''* *(vertical and crosswise pattern)* का उपयोग करते है:

```
1 2 3
0 4 5
5535
```

5 चरण के लिये हमें मिला 0,4,13,22,15.
हम मानसिक स्तर पर सोचें 4; 53; 552; 5535.

"इस तरह हम चढ़ाव तथा उतार की प्रकिया (उपर की पंक्ति के अंकों के साथ आगे बढ़ाते हुए तथा नीचे की पंक्तियों के साथ पीछे बढ़ते हुए) करते हैं"

वैदिक गणित पृष्ठ 32

अभ्यास -J गुणा करें (यहाँ कुछ प्रश्नों में हांसिल नहीं है):

a 1 2 1 1 3 1	**b** 1 3 1 2 1 2	**c** 1 2 1 2 2 2	**d** 3 1 3 1 2 1
e 2 1 2 3 1 3	**f** 1 2 3 3 2 1	**g** 2 1 2 4 1 4	**h** 2 2 2 3 3 3
i 2 4 6 3 3 3	**j** 1 0 5 5 0 7	**k** 1 0 6 2 2 2	**l** 5 1 5 5 5 5
m 4 4 4 7 7 7	**n** 3 2 1 3 2 1	**o** 1 2 3 2 7 1	**p** 1 2 4 3 5 6

a	**15 851**	**b**	**27 772**	**c**	**26 862**	**d**	**37 873**
e	**66 356**	**f**	**39 483**	**g**	**87 768**	**h**	**73 926**
i	**81 918**	**j**	**53 235**	**k**	**23 532**	**l**	**285 825**
m	**344 988**	**n**	**103 041**	**o**	**33 333**	**p**	**44 144**

11.7 लिखित गणना

यह गुणन क्रिया को लिखने के लिये उपयोगी है।
वैदिक प्रणाली में हम इसे बायें से दायें या दायें से बायें कर सकते है।
हम यहाँ दायें से बायें का तरीका उपयोग करते हैं, लेकिन सूत्र वही है: *''सीधे (खड़े) और तिरछे''* (*Vertically and Crosswise*)**.**

21 **42 × 31** हल करें

प्रश्न को पहले की तरह लिखा:

A. हम **दायें को खड़े गुणा** करें: 2×1 = **2,**
और दाहिने तरफ के उत्तर के अंक नीचे रखें।

B. तब **आड़े गुणा** करें और जोड़ें 4+6 = **10** पाने के लिए
इसलिए हम 0 नीचे रखते है और हासिंल बायें को।

C. **अंत में बायें ˙ को खड़े गुणा करें:** 4×3 = **12,**
12 + हांसिल का 1 मिलकर 13, जिसे हम नीचे लिखें।

```
   4 2
   3 1
 -------
 1 3 0 2
   1
```

22 **86 × 23** हल करें

A. तरीका उपर जैसा है: दायें को खड़े, 6×3 = **18**,
8 नीचे लिखें हांसिल 1

B. आड़े, 24 + 12 = **36**, 36 + हांसिल 1 = 37,
7 नीचे लिखें हांसिल 3

C. बायें को खड़े, 8×2 = **16**, 16 + हांसिल 3 = 19,
नीचे रखें19.

$$\begin{array}{rrrr} & & 8 & 6 \\ & & 2 & 3 \\ \hline 1 & 9 & 7 & 8 \\ \hline & {\scriptstyle 3} & {\scriptstyle 1} & \end{array}$$

23 **4321 × 24** निकालें

यहाँ हम गुणक खिसकाने के तरीके का उपयोग कर सकते हैं

A. पहले दायें को खड़े, 1×4 = 4, इसे नीचे रखें।

B. आड़े, 8+2 = 10, नीचे रखें 0, हांसिल 1.

C. आगे 32 को 24 से आड़े गुणा करें,,
यह हुआ 12+4 = 16, 16 + 1 हांसिल से मिला 17,
नीचे लिखें 7 हांसिल 1.

$$\begin{array}{rrrrrr} & & 4 & 3 & 2 & 1 \\ & & & & 2 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 3 & 7 & 0 & 4 \\ \hline \end{array}$$

D. तब 43 को 24 से तिरछे गुणा करने पर हुआ,
16+6 = 22, 22 + हांसिल 1 देता है 23,
3 नीचे रखें 2 हांसिल

E. बायें को खड़े, 4×2 = 8, 8 + हांसिल 2 देता है 10,
10 को नीचे रखें।

24 **234 × 234** हल करें

$$\begin{array}{rrrrr} & & 2 & 3 & 4 \\ & & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 4 & 7 & 5 & 6 \\ \hline {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 2} & {\scriptstyle 2} & {\scriptstyle 1} & \end{array}$$

हम अनुभाग 11.6 में बताये तरीके से ही क्रिया करते हैं, लेकिन शुरू दायें तरफ से करते हैं:
4×4 = 16, 6 को नीचे रखें और हांसिल 1 बायें को
और क्रमश:3×4 + 4×3 = 24, 24 + हांसिल 1 = 25, 5 को नीचे रखें और हांसिल 2

अभ्यास -K नीचे दिये हुए को दायें से बायें गुणा करें:

a 31 × 41	**b** 23 × 22	**c** 61 × 42
d 52 × 53	**e** 54 × 45	**f** 78 × 33
g 17 × 71	**h** 88 × 88	**i** 231 × 32
j 416 × 41	**k** 182 × 23	**l** 473 × 37
m 5432 × 32	**n** 6014 × 24	**o** 3333 × 22
p 444 × 333	**q** 543 × 345	**r** 707 × 333

a	**1 271**	**b**	**506**	**c**	**2 562**
d	**2756**	**e**	**2 430**	**f**	**2 574**
g	**1 207**	**h**	**7 744**	**i**	**7 392**
j	**17 056**	**k**	**4 186**	**l**	**17 501**
m	**173 824**	**n**	**144 336**	**o**	**73 326**
p	**147852**	**q**	**187335**	**r**	**235431**

योगों को जमाना (Setting the sums out)

उदाहरण 24 में पाँच चरणों में से प्रत्येक समरूपता का केन्द्र था।

$$\begin{array}{r} {}^{2}\cdot\cdot\cdot{}^{3}\cdot\cdot{}^{4} \\ \underline{2\ 3\ 4}\ \times \\ \underline{5\,4\,7\,5\,6} \end{array}$$

दायें ओर के पाँच बिन्दू इन पाँच केन्द्र को दिखाते हैं और जैसे–जैसे हम बायें से दायें या दायें से बायें, प्रश्न के माध्यम से बढ़ते हैं, यहां ऐसा लगता है कि बिन्दू प्रश्न के माध्यम से बढ़ रहा है।

यहाँ गणना में पांच चरण (Step) के परिणाम का एक अंक उस चरण (Step) के बिन्दू के नीचे रखा।

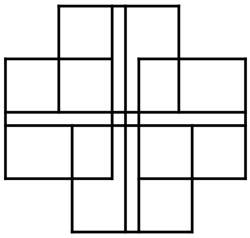
दूसरे भी तरीके प्रश्न को हल करने और उत्तर निकालने के हैं और पसंद किए जा सकते हैं।

“इस तरह के कार्यो को बालकों द्वारा किये जाते देखकर, डाक्टर, प्रोफेसर तथा गणित के दिग्गज दांतों तले उंगली दबा लेते हैं और पूछते हैं कि ‘‘क्या यह गणित है या जादू’’? हम हमेशा उत्तर देते हैं कि ‘‘दोनो’’ जब तक न समझ आये तब तक जादू और तत्पश्चात गणित। तथा उसके बाद हम अपने इस उत्तर की परिशुद्धता को प्रमाणित करते हैं”

वैदिक गणित पृष्ठ सं. xvii.

अध्याय 12
वर्ग निकालना

सारांश



12.1 संख्याओं का वर्ग निकालना जिसके अंत में है 5।
12.2 संख्याओं का वर्ग निकालना जो 50 के पास है
12.3 सामान्य वर्ग निकालना – बायें से दायें
12.4 संख्या विभाजन – वर्ग निकालने को सरल करना।
12.5 बीजगणितीय वर्ग निकालना.
12.6 वर्ग का अंक जोड़ – वर्ग संख्या के गुण
12.7 सही वर्ग का वर्गमूल – जहाँ उत्तर 2 अंको की संख्या है**.**
12.8 3 और 4 अंकों की संख्या – बड़ी संख्या का वर्ग निकालना।

12.1 ऐसी संख्याऐं जिनके अंत में 5 हैं

संख्या को उसी संख्या से गुणा करना वर्ग निकालना है:
इसलिए **75 × 75** कहलाता है ''75 वर्ग'' और इस तरह लिखते हैं **75^2**.
सूत्र *''पहले से एक अधिक के द्वारा''* (*By One More Than the One Before*) जिनके अंत में 5 है उन संख्याओं का वर्ग निकालने के लिये सुंदरता से सरल तरीका देता है।

1 **75^2**, की स्थिति में, हम 7 को (5 के पहले की संख्या) इसके आगे की संख्या 8, से केवल गुणा करें। इससे हमें प्राप्त हुआ 56 जो उत्तर का प्रथम भाग है, और अंतिम भाग केवल 25 (5^2) ।
इसलिए **75^2 = 56/25** जहाँ 56=7×8, 25=5^2.

2 इसी तरह **65^2 = 4225** 42=6×7, 25=5^2.

3 और **25^2 = 625** जहाँ 6=2×3.

4 4½ चूंकि = 4.5, संख्या जिनके अंत में ½ है का वर्ग निकालने के लिए यही तरीका लागू होता है। इसलिए **4½^2 = 20¼**, जहाँ 20 = 4×5 और ¼ = ½^2.
इस तरीके को कितनी भी बड़ी संख्या पर लगा सकते हैं

5 **305^2 = 93025** जहाँ 930 = 30×31.

बड़ी संख्या के लिये भी जैसे 635^2, 635 X 635 का गुणा करने के बजाय 63 का 64 से गुणा करके 25 रखना ज्यादा सरल है।

बीजगणितीय प्रमाण: $(ax + 5)^2 = a(a + 1)x^2 + 25$, जहाँ $x = 10$. अध्याय 11.2 के अंत में देखें।

अभ्यास -A नीचे लिखी संख्याओं का वर्ग निकालें:

a 55	**b** 15	**c** 8½	**d** 95
e 105	**f** 195	**g** 155	**h** 245
i 35	**j** 20½	**k** 8005	**l** 350

कौनसी संख्या को वर्ग करने पर नीचे दी गई संख्या प्राप्त होती है:

m 2025 **n** 30¼ **o** 902500

a 3025	**b 225**	**c 72¼**	**d 9025**
e 11025	**f 38025**	**g 24025**	**h 60025**
i 1225	**j 420¼**	**k 64080025**	**l 122500**
m 45	**n 5½**	**o 950**	

12.2 50 के पास की संख्याओं का वर्ग निकालना

यहाँ दूसरा वर्ग करने का विशेष एक दूसरा तरीका है।

6 **53^2 = 2809**.

उत्तर दो भाग में: 28 और 09.
28 केवल अंतिम संख्या, 25 को 3 से बढ़ाया
और 09 केवल 3^2

7 इसी तरह **52^2 = 2704** $(2 = 2 + 25, 04 = 2^2)$.

बीजगणितीय प्रमाण : $(50 + a)^2 = 100(25 + a) + a^2$.

अभ्यास -B इन्हें करें:

a 54^2 **b** 56^2 **c** 57^2 **d** 58^2 **e** 61^2

f 62^2 **g** 51^2

---

a 2916 b 3136 c 3249 d 3364 e 3721
f 3844 g 2601

> **8** **$47^2 = 2209$.**
>
> इसी तरह 50 से कम की संख्या की कमी, हम 50 से निकालते हैं, (यहाँ कमी 3) 47 प्राप्त हुआ इस स्थिति में, और कमी का वर्ग 9 रखें।

उपरोक्त बीजगणितीय प्रमाण में 'a' का मान (50 से नीचे की संख्याओं के लिए ऋणात्मक होगा)

अभ्यास -C इस तरीके से नीचे दी गई संख्या का वर्ग निकालें:

a 46 **b** 44 **c** 42 **d** 39 **e** 43

f 49 **g** 41 **h** 37

---

a 2116 b 1936 c 1764 d 1521 e 1849
f 2401 g 1681 h 1369

12.3 सामान्य वर्ग करना

जब दो एक जैसी संख्याओं को गुणा करना है तब, सूत्र *''सीधे (खड़े) ओर तिरछे'* (*Vertically and Crosswise*) इसे अच्छी तरह सरल करता है और हमें संख्याओं का वर्ग निकालने का सरल तरीका देता है।

<u>डुप्लेक्स (DUPLEX)</u>

हम **डुप्लेक्स** शब्द D का उपयोग इस तरह करेंगें :

1 अंक के लिये **D उसका वर्ग** है अर्थात, $D(4) = 4^2 =$ **16**;

2 अंक के लिये **D दोनो अंक के गुणा का दुगना** अर्थात $D(43) = 2\times4\times3 =$ **24**.

अभ्यास -D निम्नलिखित संख्याओं का डुप्लेक्स निकालें:

a 5	**b** 23	**c** 55	**d** 2
e 14	**f** 77	**g** 26	**h** 90

---

a	**25**	**b**	**12**	**c**	**50**	**d**	**4**
e	**8**	**f**	**98**	**g**	**24**	**h**	**0**

किसी भी संख्या का वर्ग उसके सभी डुप्लेक्स का केवल जोड़ है, सभी डुप्लेक्स को इसी तरह संयुक्त करते हैं जैसा हम दिमागी स्तर पर गुणा करने में उपयोग करते हैं।

9 **43^2 = 1849**.

बायें से दायें करते हुए यहाँ तीन डुप्लेक्स हैं 43 में: D(4), D(43) and D(3).

D(4) = **16**, D(43) = **24**, D(3) = **9**,

इन तीन परिणामों को सामान्य रूप से संयुक्त करने पर हमें मिला 16

16,24 = 184

184,9 = **1849**.

10 **64^2 = 4096**.

D(6) = **36**, D(64) = **48**, D(4) = **16**,

इसलिये दिमागी स्तर पर हमें मिला 36

36,48 = 408

408,16 = **4096**.

बीजगणित प्रमाण: $(10a + b)^2 = 100(a^2) + 10(2ab) + b^2$. किसी संख्या को उसी से गुणा करना सामान्य गुणा करने के तरीके का उपयोग करके भी इसे समझाया जा सकता है।

अभ्यास -E नीचे दिये गए का वर्ग निकालें:

a 31	**b** 14	**c** 41	**d** 26
e 23	**f** 32	**g** 21	**h** 66
i 81	**j** 91	**k** 56	**l** 63
m 77	**n** 33		

a	**961**	**b**	**196**	**c**	**1681**	**d**	**676**
e	**529**	**f**	**1024**	**g**	**441**	**h**	**4356**
i	**6561**	**j**	**8281**	**k**	**3136**	**l**	**3969**
m	**5929**	**n**	**1089**				

बड़ी संख्या के डुपलेक्स और वर्ग अध्याय 12.8 में दिये हैं।

12.4 संख्या विभाजन

जब हम दो अंकों का गुणा कर रहे थे, आप याद करें, हमने कभी–कभी दो अंकों के समूह को एक की तरह माना (अध्याय 11.4 देखें) यही वर्ग में भी लागू होता है

11 **123^2 = 15129.**

यहाँ 123 को हम सोचें जैसे 12 / 3, मानें कि यह दो अंक संख्या है:

D(12) = 12^2 = **144**,
D(12/3) = 2 × 12 × 3 = **72**,
D(3) = 3^2 = **9**.
इन्हें संयुक्त करने पर: 14 4,7 2 = 1512, और 1512,9 = **15129**.

अभ्यास -F नीचे दिये गये का वर्ग, पहले 2 अंकों का समूह बनाकर करें:

a 121	**b** 104	**c** 203	**d** 113
e 116	**f** 108	**g** 111	

a 14 641 b 10 816 c 41 209 d 12 769 e 13 456 f 11 664 g 12321

संख्या के विभाजन का दूसरा तरीका, अध्याय 11.4 में दिखाया गया है उसे भी यहाँ प्रयोग कर सकते हैं।

12 **312^2 = 97344.**

यहाँ हम संख्या को 3 / 12 में विभाजित कर सकते हैं लेकिन हमें अंकों के जोड़ों (pairs) के साथ काम करना चाहिए:

D(3) = **9**, D(3/12) = **72**, D(12) = **144**.
संयुक्त करने पर: 9,72 = 972 हम 72 के दोनो अंक 9 के बाद रख सकते हैं।
97 2,144 = **97344**.

अभ्यास -G नीचे दिये गये का वर्ग निकालें, अंतिम 2 अंकों के जोड़े (pair) बना कर:

a 211	**b** 412	**c** 304	**d** 902
e 407	**f** 222	**g** 711	

---

a 44 521	**b 169 744**	**c 92 416**	**d 813 604**
e 165 649	**f 49 284**	**g 505 521**	

12.5 बीजगणितीय वर्ग निकालना

बिल्कुल वही तरीका जो हम संख्याओं के वर्ग निकालने के लिए उपयोग कर रहे थे उसे बीजगणितीय व्यंजक के लिये कर सकते हैं।

13 $\mathbf{(x + 5)^2}$ हल करें

यह बिल्कुल संख्या का वर्ग निकालने जैसा है: हम x, x+5 ,5 के डुपलेक्स निकालते हैं।

$D(x) = \mathbf{x^2}$, $D(x+5) = 2\times x\times 5 = \mathbf{10x}$, $D(5) = 5^2 = \mathbf{25}$.

So $\mathbf{(x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25}$.

14 $\mathbf{(2x + 3)^2}$ हल करें

यहाँ तीन डुपलेक्स हैं: $D(2x) = \mathbf{4x^2}$, $D(2x+3) = 2\times 2x\times 3 = \mathbf{12x}$, $D(3) = \mathbf{9}$.

इसलिए $\mathbf{(2x + 3)^2 = 4x^2 + 12x + 9}$.

15 $\mathbf{(x - 3y)^2}$ हल करें

इसी तरह: $D(x) = \mathbf{x^2}$, $D(x-3y) = 2\times x\times -3y = \mathbf{-6xy}$, $D(-3y) = \mathbf{9y^2}$.

इसलिए $\mathbf{(x - 3y)^2 = x^2 - 6xy + 9y^2}$.

अभ्यास -H नीचे दिये हुए का वर्ग निकालें:

a (3x + 4)	**b** (5y + 2)	**c** (2x – 1)	**d** (x + 7)
e (x – 5)	**f** (x + 2y)	**g** (3x + 5y)	**h** (2a + b)
i (2x – 3y)	**j** (x + y)	**k** (x – y)	**l** (x – 8y)

a $9x^2+24x+16$	**b** $25y^2+20y+4$	**c** $4x^2-4x+1$	**d** $x^2+14x+49$
e $x^2-10x+25$	**f** $x^2+4xy+4y^2$	**g** $9x^2+30xy+25y^2$	**h** $4a^2+4ab+b^2$
i $4x^2-12xy+9y^2$	**j** $x^2+2xy+y^2$	**k** $x^2-2xy+y^2$	**l** $x^2-16xy+64y^2$

12.6 वर्ग का अंकजोड़

वर्ग संख्याओं के विवेचन से रोचक व उपयोगी बात सामने आती है, उदाहरण के लिए नीचे दिए गए परिणाम जो इस प्रकार हैं।

> वर्ग संख्या का अंक जोड़ सिर्फ 1, 4, 7, 9 होता है और उनके
> अन्त में इनमें से कोई एक अंक 1, 4, 5, 6, 9, 0.

इसका मतलब है कि वर्ग संख्या में कुछ अंक, अंक–जोड़ में हो ही नही सकते और उनके अंत में कुछ अंक ऐसे हैं जो आ ही नही सकते।

नीचे दिये गये अभ्यास में कुछ संख्याए उपर दिये गये परिणाम के अनुसार से वर्ग संख्या नहीं हो सकती।

अभ्यास -I कौन सी वर्ग संख्या नही है (उपर के परिणाम से पहचानें)

a 4539	**b** 5776	**c** 6889	**d** 5271
e 104976	**f** 65436	**g** 27478	**h** 75379

a, d, f, g

अगर किसी संख्या का अंक जोड़ व अन्तिम अंक उपर दर्शाये अनुसार है तो इसका मतलब यह नहीं कि वह वर्ग संख्या है। पिछले उदाहरण में अंतिम संख्या 75379, वर्ग संख्या नहीं है जबकि अंकजोड़ (4) और अन्तिम अंक 9 उपर दर्शाये अनुसार है।

12.7 पूर्ण वर्ग का वर्गमूल

16

6889 हल करें

पहले ध्यान दे कि यहाँ अंकों के दो समूह हैं, 68, 89 इसलिए हम दो अंक का उत्तर उम्मीद करते हैं।

बाद में हम सूत्र *''पहले को पहले से, अंतिम को अंतिम से''* (*The First by the First and the Last by the Last*) का उपयोग करते हैं। 68 को शुरू में देखने पर हम समझ जाते हैं कि 68 बड़ा है 64(8^2) से और छोटा है 81 (9^2) से अतः पहला अंक 8 होना चाहिये। या इसको दूसरी तरह देखने पर 6889, 6400 और 8100 के बीच है।

$$6400 = 80^2$$
$$\mathbf{6889 = 8?^2}$$
$$8100 = 90^2$$

इसलिए $\sqrt{6889}$ 80 और 90 के बीच होना चाहिये अर्थात यह 80 और कुछ होना चाहिये

अब 6889 के अंतिम अंक को देखें, जो कि 9 है।

कोई भी संख्या जिसके अंत में 3 है उसका वर्ग करने पर अंतिम अंक 9 हुआ इसलिये संख्या जिसकी हमें तलाश है वो 83 हो सकती है।

लेकिन कोई भी संख्या जिसका अंतिम अंक 7 है उसके वर्ग के अंत में भी 9 होगा इसलिये संख्या 87 भी हो सकती है।

इसलिए उत्तर 83 या 87 है?

यहाँ निश्चय करने के दो सरल तरीके हैं, पहला अंक जोड़ का उपयोग कर।
अगर $87^2 = 6889$ तब अंक–जोड़ में बदलने पर हमें मिला $6^2 \rightarrow 4$, जो सही नही है। लेकिन $83^2 = 6889$ होता है $2^2 \rightarrow 4$, इसलिये उत्तर **83** होना चाहिये।

दूसरा तरीका यह है कि चूंकि $85^2 = 7225$ और 6889 इससे **कम** है इसलिए $\sqrt{6889}$ भी 85 से **कम** होना चाहिये। इसलिये यह **83** होना चाहिये।

4 अंकों की पूर्ण वर्ग संख्या का वर्ग मूल निकालने के लिये हम उसका प्रथम अंक संख्या के प्रथम अंक को देखकर और संख्या के अंतिम अंक को देखकर हम दो संभावित अंतिम अंक निकालते हैं। तब हम या तो अंक जोड़ या औसत के वर्ग से यह निश्चय करते हैं कि कौनसा अंतिम अंक सही है।

17 $\sqrt{\mathbf{5776}}$ हल करें

शुरू के 57, 49 व 64 के बीच है, इसलिये पहला अंक 7 होना चाहिए।

अंत में 6 यह बतलाता है कि वर्गमूल का अंतिम अंक 4 या 6 है।
इसलिए उत्तर 74 या 76 है।

$74^2 = 5776$ होता है $2^2 \rightarrow 7$ जो अंक जोड़ के हिसाब से सही नहीं है, इसलिए 74 उत्तर नही है।
$76^2 = 5776$ होता है $4^2 \rightarrow 7$, जो सही है, इसलिये **76** सही उत्तर है।

74 और 76 में से किसी एक को चुनने का दूसरा तरीका कि हम ध्यान दें $75^2 = 5625$ और 5776 इससे अधिक है। इसलिये यह **76** होना चाहिये।

नीचे दिये गये अभ्यास का उत्तर दिमागी स्तर पर निकालने की कोशिश करें, अगर आप कर सकते हैं तो सिर्फ उत्तर लिखें।

अभ्यास -J इनका वर्गमूल निकालें:

a 2116	**b** 5329	**c** 1444	**d** 6724
e 3481	**f** 4489	**g** 8836	**h** 361
i 784	**j** 3721	**k** 2209	**l** 4225
m 9604	**n** 5929		

a	**46**	**b**	**73**	**c**	**38**	**d**	**82**
e	**59**	**f**	**67**	**g**	**94**	**h**	**19**
i	**28**	**j**	**61**	**k**	**47**	**l**	**65**
m	**98**	**n**	**77**				

जैसा कि आपने देखा, जिन पूर्ण वर्ग संख्या के अंत में 5 है उनके वर्गमूल का अंतिम अंक भी 5 ही होगा, यहाँ सिर्फ एक संभावना है अंतिम अंक के लिये।

12.8 3 और 4 अंकों की संख्या

यह अध्याय 12.3 के आगे।
जैसा पहले बताया, 1–अंक का डुपलेक्स उसका वर्ग है : **D(4) = 4**^{2} = 16.
और 2–अंक का डुपलेक्स दोनों अंकों के गुणा का दुगनाः D(35) = 2×3×5 = 30.

3–अंक या उससे बड़ी संख्या का डुप्लेक्स हम निकाल सकते हैं।

3 अंक के लिये है, **बाहरी जोड़े के अंकों के गुणनफल का दुगना+मध्य के अंक का वर्ग।**

D(137) = 2×1×7 + 3^2 = **23**;

4 अंक के लिये D है, **बाहरी जोड़े के अंकों के गुणनफल का दुगना+आंतरिक जोड़े के गुणनफल का दुगना**ः D(1034) = 2×1×4 + 2×0×3 = **8**;

D(10345) = 2×1×5 + 2×0×4 + 3^2 = 19;

और क्रमशः

अभ्यास -K नीचे दी हुई संख्या का डुपलेक्स निकालें:

a 3	**b** 34	**c** 47	**d** 1	**e** 88
f 234	**g** 282	**h** 111	**i** 304	**j** 270
k 1234	**l** 3032	**m** 7130	**n** 20121	**o** 32104

---

a	**9**	**b**	**24**	**c**	**56**	**d**	**1**	**e**	**128**
f	**25**	**g**	**72**	**h**	**3**	**i**	**24**	**j**	**49**
k	**20**	**l**	**12**	**m**	**6**	**n**	**5**	**o**	**25**

जैसा कि 2 अंकों की संख्याओं में संख्या का वर्ग उसके डुपलेक्स का केवल जोड़ है।

18 **341^2 = 116281**.

यहाँ हमारे पास 3 अंकों की संख्या:

D(3) = 9, D(34) = 24, D(341) = 22, D(41) = 8, D(1) = 1.

दिमागी स्तर पर: 9,24 = 114

114,22 = 1162

1162,8,1 = **116281**.

19 **4332^2 = 18766224**.

D(4) = 16, D(43) = 24, D(433) = 33, D(4332) = 34,
D(332) = 21, D(32) = 12, D(2) = 4.

दिमागी स्तर पर: 16,24 = 184

184,33 = 1873

187 3,34 = 18764

1876 4,21 = 187661

187661,12 = 1876622

1876622,4 = **18766224**.

अभ्यास -L नीचे दिये हुए का वर्ग निकालें:

a 212	**b** 131	**c** 204	**d** 513
e 263	**f** 264	**g** 313	**h** 217
i 3103	**j** 2132	**k** 1414	**l** 4144

a	**44 944**	**b**	**17 161**	**c**	**41 616**	**d**	**263 169**
e	**69 169**	**f**	**69 696**	**g**	**97 969**	**h**	**47 089**
i	**9 628 609**	**j**	**4 545 424**	**k**	**1 999 396**	**l**	**17 172 736**

"जो भी युक्ति संगत है उसे मानना चाहिये, चाहे वह एक बालक ने कहा हो या एक तोते ने और जो युक्ति संगत नही है उसे नही मानना चाहिये, चाहें वह किसी बड़े बूढ़े ने कहा हो या स्वयं महर्षि शुक ने।".

वैदिक गणित से पृष्ठ (xxx)से

अध्याय 13
समीकरण

सारांश

13.1 एक चरण (Step) समीकरण
13.2 दो चरण (Step)समीकरण
13.3 तीन चरण (Step) समीकरण
} – मानसिक एक लाईन समाधान

13.1 एक चरण (Step) समीकरण

समीकरण जैसे $x + 39 = 70$, $x - 7 = 8$, $3x = 15$ और $\frac{x}{3} = 7$ वैदिक सूत्र *''पक्षान्तरण कर उपयोग करें''* *(Transpose and Apply)* का उपयोग कर सरलता से हल की जा सकती है।

पक्षान्तरण मतलब उल्टा और समीकरण हल करने में *Transpose and Apply* means का मतलब:

> जहाँ संख्या को x-term: में **जोड़ा**ः दूसरी तरफ **घटाइये**
> जहाँ संख्या को **घटाया**ः जोड़ें
> जहाँ x-term को **गुणा** कियाः भाग दें
> जहाँ x-term को **भाग** दियाः गुणा करें।

अभ्यास -A नीचे दी गई समीकरण को हल करें, प्रत्येक उत्तर के सत्यापन की जाँच करें:

a $x + 3 = 10$	**b** $x - 3 = 10$	**c** $20 + x = 100$	**d** $x - 19 = 44$
e $x + 88 = 100$	**f** $x - 3\frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$	**g** $x + 123 = 1000$	**h** $x + 1.3 = 5$
i $5x = 35$	**j** $2x = 26$	**k** $3x = 960$	**l** $2x = 76$
m $40x = 120$	**n** $2\frac{1}{2}x = 10$	**o** $\frac{X}{7} = 7$	**p** $\frac{X}{4} = 5$

---

a	**7**	**b**	**13**	**c**	**80**	**d**	**63**
e	**12**	**f**	**8**	**g**	**877**	**h**	**3.7**
i	**7**	**j**	**13**	**k**	**320**	**l**	**38**
m	**3**	**n**	**4**	**o**	**49**	**p**	**20**

यह, जरूर केवल मानसिक अंकगणित की बात है और इसी तरह पढ़ाया जा सकता है।

13.2 दो स्टेप समीकरण

कभी–कभी दो या अधिक बार सूत्र *''पक्षान्तरण कर उपयोग करें''* (*Transpose and Apply*) के उपयोग की आवश्यकता होती है, जैसा नीचे दिया उदाहरण बताता है।

1 **$2x + 3 = 13$** को हल करें।

हम समीकरण के दोनों तरफ से 3 निकालते हैं इससे मिलता है $2x = 10$.

तब आप देखेंगे कि **$x = 5$** उत्तर है:

जाँच करना : $2\times\mathbf{5} + 3 = 13$ इसलिए यह सही है।
यहाँ *''Transpose and Apply''* के दो अनुप्रयोग हैं:
पहिला +3 बताता है कि हम 3 घटायें 13 से (10 पाने के लिए),
तब 2x बताता है कि हम 10 को 2 से भाग दें।

2 हल करें **$5x – 4 = 36$**.

सूत्र का उपयोग कर हम 4 को जोड़ते हैं 40 पाने के लिये।
तब $40\div5 = 8$, इसलिए **$x = 8$**.

जाँच: $5\times\mathbf{8} – 4 = 36$.

प्रश्न के चरण इस तरह लिखना सही है,

$$5x – 4 = 36$$
$$5x = 40$$
$$\underline{\mathbf{x = 8}}$$

लेकिन विद्यार्थी सीधे भी उत्तर लिखने लायक होना चाहिये।

3 $\frac{x}{7}$ **+ 3 = 5** हल करें

यहाँ हम 5 से 3 निकालते हैं 2 पाने के लिये,
तब 2 को 7 से गुणा किया, इसलिए **$x = 14$**.

4 $\frac{2x}{3}$ **= 4** हल करें

3 को 4 से गुणा कर 12 पाने के लिये,
तब $12\div2=6$, इसलिए **$x = 6$**.

5 हल करें $\frac{x-3}{4}=5$

क्योंकि बायें और सभी में 4 से भाग है, हम 4 से दोनों तरफ गुणा करने से शुरू करते हैं, तब हम परिणाम में 3 जोड़ते हैं जिससे प्राप्त हुआ **x = 23**

अभ्यास -B नीचे दी गई समीकरण को मानसिक स्तर पर हल करें, आपके उत्तर को जाँचे

a $3x + 7 = 19$ **b** $2x + 11 = 21$ **c** $4x - 5 = 7$ **d** $3x - 8 = 10$

e $\frac{x}{3} + 4 = 6$ **f** $\frac{x}{2} - 8 = 2$ **g** $\frac{2x}{3} = 8$ **h** $\frac{x+4}{7} = 5$

i $\frac{x-21}{10} = 1$ **j** $2x + 1 = 3.8$

---

a	**4**	**b**	**5**	**c**	**3**	**d**	**6**
e	**6**	**f**	**20**	**g**	**12**	**h**	**31**
i	**31**	**j**	**1.4**				

13.3 3 चरण (Step) समीकरण

कभी–कभी हमें समीकरण हल करने के लिये 3–चरण(Step) की आवश्यकता होती है। पर फिर भी यह केवल मानसिक अंकगणित की बात है।

6 हल करें $\frac{3x}{5}+4=10$

पहिले 10 – 4 = 6, तब 6×5 = 30, तब 30÷3 = 10 इसलिये **x = 10**.

7 $\frac{3x+2}{4}=8$ हल करें

पहिले 8×4 = 32, तब 32–2 = 30, तब 30÷3 = 10 इसलिए **x = 10**.

8 **2(3x + 4) = 38** हल करें।

कोष्टक यहाँ बताता है कि (3x + 4) को कोष्टक के बाहर दिये गए अंक से गुणा किया जा रहा है।
इसलिए हम 38 को 2 से भाग देने से शुरू करते हैं।

पहले 38 ÷ 2 = 19, तब 19 – 4 = 15, तब 15 ÷ 3 = 5 इसलिए **x = 5**.

दूसरा तरीका यहाँ हम कोष्टक के बाहर की संख्या से पहिले गुणा करें:
अगर 2(3x + 4) = 38 तब 6x + 8 = 38
और इसलिए 38 – 8 = 30 और 30 ÷ 6 = **5**.

अभ्यास -C नीचे दिये हुए को मानसिक स्तर पर हल करें:

a $\frac{2x}{3}+4=8$ **b** $\frac{3x}{5}-4=5$ **c** $\frac{7x}{2}-10=11$ **d** $\frac{2x}{3}+4=8$

e $\frac{2x+1}{3}=4$ **f** $\frac{2x-3}{5}=3$ **g** $\frac{5x+2}{3}=9$ **h** $\frac{6x-1}{7}=5$

i 3(5x – 2) = 54 **j** 8(x + 3) = 64 **k** 3(7x – 3) = 33 **l** 2(4x + 3) = 102

a	**6**	**b**	**15**	**c**	**6**	**d**	**8**
e	**5.5**	**f**	**9**	**g**	**5**	**h**	**6**
i	**4**	**j**	**5**	**k**	**2**	**l**	**12**

''इन सभी के पीछे का मूल भूत सिद्धांत है–परावर्त्य योजयेत
जिसका अर्थ है ''परिवर्तन या पक्षांतरण तथा समायोजन''।
इसके अनुप्रयोग अनेक तथा बहुत उपयोगी हैं।.''
वैदिक गणित से, पेज नं. 911

अध्याय 14
भिन्न

सारांश

14.1 खड़े और आड़े तिरछे – भिन्न का जोड़ना और घटाना
14.2 सरलीकरण
14.3 भिन्न की तुलना
14.4 कार्य का एकीकरण: भिन्न के +, –, ×, ÷ सभी सरलता से सम्बन्धित हैं।

14.1 सीधे (खड़े) और तिरछे दोनो प्रकार से

भिन्न को जोड़ना व घटाना अधिकतर काफी कठिन होता है क्योंकि तरीका जटिल व याद रखना कठिन है। लेकिन सूत्र *''सीधे (खड़े) और तिरछे''* त्वरित उत्तर देता है।

1 हल करें $\frac{2}{3} + \frac{1}{7}$

अंश को निकालने के लिये हम तिरछे गुणा कर जोड़ते हैं: $\frac{2}{3} \times \frac{1}{7}$

$2\times7 + 1\times3 = \mathbf{17}$,

तब 'हर' (Denominators) निकालने के लिये दोनो हर का गुणा करते हैं: $3\times7 = \mathbf{21}$. $\quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{7}$

इसलिए $\frac{2}{3} + \frac{1}{7} = \frac{17}{21}$

यह क्यों काम करता है इसका कारण है कि भिन्न को जोड़ने के लिये दोनों हर को समान होना चाहिए, और यह हम $\frac{2}{3}$ में उपर और नीचे 7 का गुणा करके (हर 21 प्राप्त करने के लिये) और $\frac{1}{7}$ में उपर और नीचे 3 का गुणा करते हैं (वही 'हर', 21 प्राप्त करने के लिये)। इसलिये प्रत्येक अंश से दूसरे हर का गुणा होता है और बिल्कुल यही हमनें किया।

3 $7\frac{4}{5} + 2\frac{1}{3}$ हल करें

$7\frac{4}{5} + 2\frac{1}{3} = 9\frac{17}{15} = 10\frac{2}{15}$ यहाँ हम पूरे अंक के भाग को और भिन्न को अलग–अलग जोड़ते हैं: पूरे अंक 7+2 = 9 और भिन्न: 4×3 + 1×5 = 17, अंश, हर 5×3 = 15.

'अंश' (Numerator), 'हर' (Denominator)

घटाने के लिये वही तरीका उपयोग करते हैं।

3 हल करें a.$\frac{6}{7}-\frac{1}{4}$ b.$5\frac{4}{5}-1\frac{3}{4}$ c. $4\frac{1}{3}-1\frac{2}{5}$

a घटाना भी वैसा ही है सिर्फ इसके कि हम तिरछे गुणा कर जोड़ने के बजाय घटाते हैं। उपर बायें से शुरू करने का सुनिश्चत करें ।

$$\frac{6}{7}-\frac{1}{4}=\frac{6\times4-1\times7}{7\times4}=\frac{17}{28}$$

b. $5\frac{4}{5}-1\frac{3}{4}=4\frac{4\times4-3\times5}{5\times4}=4\frac{1}{20}$ यहाँ भी इसी तरह लेकिन पहिले पूरे अंक वाले भाग को जोड़ें।

c. $4\frac{1}{3}-1\frac{2}{5}=3\frac{1\times5-2\times3}{3\times5}=3\frac{1}{15}=2\frac{14}{15}$ यहाँ हमें ऋणात्मक अंक मिलता है, लेकिन उसे आसानी से हटाया जा सकता है, एक पूरे अंक से 1 ⁄ 15 घटाकर

वैकल्पिक रूप से ऋणात्मक संख्या से यहाँ बचा जा सकता है, दोनो मिश्रित भिन्न को अलग तरीके से लिख कर (जैसे $4\frac{1}{3}=\frac{13}{3}$ और $1\frac{2}{5}=\frac{7}{5}$)। इसका मतलब है कि हमें बड़ी संख्या के साथ काम करना पड़ेगा।

अभ्यास -A निम्नलिखित को संयोजन करें, आपके उत्तर को रद्द करते हुए या मिश्रित भिन्न में रखकर जहाँ आवश्यक हो:

a $\frac{2}{5}+\frac{1}{4}$ **b** $\frac{3}{8}+\frac{2}{5}$ **c** $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}$ **d** $1\frac{1}{3}+2\frac{1}{4}$

e 3 $3\frac{3}{4}+2\frac{1}{3}$ **f** $\frac{3}{5}-\frac{2}{7}$ **g** $\frac{8}{9}-\frac{1}{2}$ **h** $\frac{3}{4}-\frac{1}{20}$

i $5\frac{3}{5}-2\frac{1}{2}$ **j** $10\frac{2}{3}-1\frac{4}{5}$ **k** $\frac{5}{12}+\frac{7}{18}$

---

a. $\frac{13}{20}$ b. $\frac{31}{40}$ c $\frac{9}{10}$ d $3\frac{7}{12}$

e $6\frac{1}{12}$ f $\frac{11}{35}$ g $\frac{7}{18}$ h $\frac{7}{10}$

I $3\frac{1}{10}$ j $8\frac{30}{15}$ k $\frac{29}{36}$

बीजगणितिय प्रमाण $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+cb}{bd}$

बिल्कुल यही तरीका बीजगणितिय भिन्न के लिये उपयोग कर सकते हैं जैसा संख्यात्मक भिन्न के लिये उपयोग किया है।

हम यहाँ ध्यान दे सकते हैं कि अक्सर भिन्न क्षैतिज (Horizontally) रूप से लिखते हैं, उदाहरण के लिये $\frac{2}{3}$ को लिखते हैं 2/3. (यह अनुपात नोटशन (2:3) और Placevalue के साथ अधिक तर्कयुक्त है)अगर भिन्न इस तरह लिखी तो सूत्र तिरछे और क्षैतिज (उदाहरण 1 देखें)के बजाय तिरछे व खड़े हो जायेगा।

इसलिए $\frac{2}{3}+\frac{1}{7}$:

$$\begin{array}{r} 2/3 \\ \underline{1/7}\,+ \\ \underline{17/21} \end{array}$$

14.2 एक सरलीकरण

आपने अंतिम अभ्यास का अंतिम प्रश्न किया (और प्रश्न h में), संख्याऐं काफी बड़ी थी और अन्त में 'अंश' व 'हर' में कुछ कॉमन फेक्टर को निरस्त करना पड़ा।
जब दो भिन्नों के 'हर' अपेक्षाकृत अविभाज्य (prime) नहीं हैं तब निम्न उदाहरण से क्रिया को सरल किया जा सकता है ।

4 $\frac{5}{12}+\frac{7}{18}$ में हर अपेक्षाकृत अभाज्य (Prime) नहीं हैः वहाँ कामन फैक्टर 6 है। हम दोनों हर को इस कामन फैक्टर से भाग देते हैं और उन्हें हर के नीचे रखते हैं (जैसा दिखाया है।):

$$\frac{5}{\underset{(2)}{12}}+\frac{7}{\underset{(3)}{18}}=\frac{5\times3+7\times2}{12\times3}=\frac{29}{36}$$

इसलिए हम 2 और 3 को 12 व 18 के नीचे रखते हैं।
जब हम (cross-multiply) तिरछे गुणा करें तो 12 और 18 के बजाय 2 और 3 का उपयोग करें। हर के उत्तर के लिये हम हर को उनके नीचे लिखे अंकों से तिरछे गुणा करेंः या तो 12×3 या 18×2, दोनो 36 देंगे।

जिस भिन्न का 'हर' (Denominator) अपेक्षाकृत अविभाज्य (prime) नही है, उनको घटाने का काम, इसी तरह किया जाता है सिवाय कि हम 'अंश' को पहिले की तरह घटायें।

अभ्यास -B निम्नलिखित को जोड़ने या घटाने के लिये इस सरलीकरण का उपयोग करें:

a $\frac{1}{3}+\frac{4}{9}$ **b** $\frac{3}{8}+\frac{1}{6}$ **c** $\frac{3}{5}+\frac{3}{10}$ **d** $\frac{5}{6}-\frac{3}{4}$

e $\frac{5}{6}+\frac{3}{4}$ **f** $\frac{5}{18}-\frac{1}{27}$ **g** $3\frac{3}{4}-1\frac{1}{8}$ **h** $\frac{7}{36}-\frac{11}{60}$

---

a $\frac{7}{9}$ **b** $\frac{13}{24}$ **c** $\frac{9}{10}$ **d** $\frac{1}{12}$

e $1\frac{7}{12}$ **f** $\frac{13}{54}$ **g** $2\frac{5}{8}$ **h** $\frac{1}{90}$

14.3 भिन्न की तुलना

कभी–कभी हमें यह जानने की आवश्यकता होती है कि क्या भिन्न एक दूसरे से छोटी है या बड़ी, हमें भिन्न को उनके मान के हिसाब से रखना हो सकता है।

5 भिन्न $\frac{4}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}$ को बढ़ते हुए क्रम में लिखें।

पहिले दो भिन्न को देखते हुए तिरछा गुणा करें और घटायें भिन्न को घटाने की तरह। जैसे हम भिन्न को घटाना चाहते हैं।
अगर हम पायें कि घटाना संभव है बिना ऋणात्मक परिणाम के तब पहली भिन्न बड़ी है:
चूकि 4×3 ज्यादा है 2×5, से, इसलिये $\frac{4}{5}$ बड़ी $\frac{2}{3}$

यही $\frac{2}{3}$ और $\frac{5}{6}$ के साथ करने पर हम पाते हैं कि 2×6 छोटा है 5×3 से, इसलिये 5/6 बड़ा है 2/3 से।
अगर हम अब $\frac{4}{5}$ को $\frac{5}{6}$ से तिरछे गुणा करें हम पाते हैं कि $\frac{5}{6}$ बड़ा है।
इसलिये बढ़ते क्रम में भिन्न है: $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$

अभ्यास -C निम्नलिखित भिन्न को बढ़ते क्रम में रखें:

a $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}$ **b** $\frac{3}{4}, \frac{8}{11}$ **c** $\frac{2}{3}, \frac{7}{12}, \frac{3}{4}$ **d** $\frac{5}{6}, \frac{5}{8}, \frac{6}{7}$

---

a $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}$ **b** $\frac{8}{11}, \frac{3}{4}$ **c** $\frac{7}{12}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ **d** $\frac{5}{8}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}$

14.4 कार्य का एकीकरण

भिन्न को गुणा करना और भाग देना भी बहुत सरल है।

6 हल करें a. $\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}$ b. $\frac{3}{4}\div\frac{2}{5}$

a. $\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{1\times 3}{2\times 4}=\frac{3}{8}$ हम अंश का उत्तर पाने के लिये दोनो अंश का गुणा करें, और 'हर' का उत्तर पाने के लिये दोनों हर का गुणा करें।

b. $\frac{3}{4}\div\frac{2}{5}=\frac{3\times 5}{2\times 4}=\frac{15}{8}=1\frac{7}{8}$ हम तिरछे गुणा कर प्रथम गुणा को दूसरे के उपर रखते हैं।

जोड़, घटाना, गुणा, भाग चारों अब ऐसे दिखते हैं कि उनमें बहुत अधिक एकीकृत सम्बन्ध हैं।

हम इन्हें संक्षेप में ऐसे लिख सकते है:

जोड़ना	घटाना	गुणा करना	भाग देना
$\frac{4}{5}\quad\frac{1}{3}$	$\frac{4}{5}\quad\frac{1}{3}$	$\frac{4}{5}\quad\frac{1}{3}$	$\frac{4}{5}\quad\frac{1}{3}$

अध्याय 15
विशेष विभाजन

सारांश

15.1 9 से भाग
15.2 8 से भाग
15.3 99, 98 से भाग
15.4 भाज्य आधार संख्या के नीचे
15.5 भाज्य आधार संख्या के ऊपर

15.1 9 से भाग देना

जैसा कि आपने पहले देखा, अंक 9 विशेष है और 9 से भाग देने का बहुत सरल तरीका है।

1 **23 ÷ 9** हल करें

9)2 3
2 r 5

23 का प्रथम अंक उत्तर है: 2.
और 23 के दोनों अंक को जोड़ने पर शेष मिलता है 2 + 3 = 5.

इसलिए **23 ÷ 9 = 2 remainder 5**.

यह देखना काफी सरल है कि यह क्यों काम करता है, क्योंकि प्रत्येक 10 में एक ही 9 है।
चूंकि दो 10 में दो 9 हैं व शेष 2.
उत्तर वही है जैसा कि शेष, 2
और इसलिए हम शेष प्राप्त करने के लिए 2 को 3 में जोड़ते हैं।

अभ्यास -A 9 से भाग दें:

a 9)51 **b** 9)34 **c** 9)17 **d** 9)44

e 9)6 0 **f** 9)7 1 **g** 9)26 **h** 9)46

---

a	**5 r6**	**b**	**3 r7**	**c**	**1 r8**	**d**	**4 r8**
e	**6 r6**	**f**	**7 r8**	**g**	**2 r8**	**h**	**4 r10 = 5 r1**

ऐसा हो सकता है कि शेष में दूसरा 9 हो, जैसा अंतिम अभ्यास के अंतिम प्रश्न में हुआ और ऐसा ही अगला उदाहरण दर्शाता है।

2 **66 ÷ 9** हल करें

9)6 6
6 r 12 = **7 r 3**

हमें मिला 6 और शेष 12 और यहाँ दूसरा 9 शेष 12 में है।

इसलिए हम एक अतिरिक्त 9 को 6 में जोड़ते हैं, जो 7 हो जाता है और शेष घटकर 3 (12 से 9 निकालें)

3 **58 ÷ 9** हल करें

9)5 8
5 r 13 = **6 r 4**

याद रखें कि 66 में कितने 9 हैं यह, निकालने की कोशिश कर रहे हैं और पहला जवाब आपको मिला 6 और शेष 12. इसलिए वहाँ 6 नौ के साथ 12 शेष हैं। चूंकि 12 में एक और 9 है, आपके पास इसलिए कुल 7 नौ व 3 शेष हैं।

आप अंतिम शेष 3, को 12 के अंक–जोड़ से भी प्राप्त कर सकते हैं।

अभ्यास -B निम्नलिखित को 9 से भाग दें:

a 9)57 **b** 9)77 **c** 9)58 **d** 9)49

e 9)64 **f** 9)88 **g** 9)96

---

a 6 r3 b 8 r5 c 6 r4 d 5 r4
e 7 r1 f 9 r7 g 10 r6

अद्वितीय गुण अंक 9 का, जो 10 से एक कम है, कई बहुत सरल वैदिक तरीके की और ले जाता है, जैसा अध्याय 15.2, 15.3, 15.4 क्रमशः भिन्न को आवर्ती दषमलव रूप में बदलने के तरीके को मेन्यूवल 2 में देखें (या संदर्भ 1 और 3) तथा अनुरूप बीजगणितीय उपयोग।

बड़ी संख्याऐं

इसे बड़ी संख्या के लिये सरलता से विस्तारित किया जा सकता है।

4 **2301 ÷ 9 = 255 remainder 6.**

प्रश्न को इस तरह लिख सकते हैं: 9)2 3 0 1

2301 के पहिले अंक 2 को सीधे उत्तर में ला सकते हैं: 9)2 3 0 1 → 2

इस 2 को 2301 के 3 में जोड़ा, और 5 को नीचे रखा: 9)2 3 0 1 → 2 5

इस 5 को 2301 के ''0'' में जोड़ा और 5 को नीचे रखा: 9)2 3 0 1 → 2 5 5

इस 5 को 1 में जोड़ा, शेष 6 हुआ: 9)2 3 0 1 → 2 5 5 r6

> संख्या जिसमें भाग दे रहे हैं का प्रथम अंक उत्तर का प्रथम अंक है, उत्तर का प्रत्येक अंक भाजक के अगले अंक में जोड़ते हैं जो कि उत्तर का अगला अंक होता है। अंतिम में जो हम लिखते हैं वह शेष है ।

अभ्यास -C निम्नलिखित को भाग दें:

a 9)2 1 2 3	**b** 9)3 1 2	**c** 9)1 1 2 0 2
d 9)4 3 1	**e** 9)5 0 3 0	**f** 9)7 0 7
g 9)2 0 3 0 1 0	**h** 9)1 6 4	**i** 9)3 1 0 3 2

---

a 235 r8	**b 34 r6**	**c 1244 r6**
d 47 r8	**e 558 r8**	**f 78 r5**
g 22556 r6	**h 18 r2**	**i 3448 r0**

हांसिल

9 से भाग देने का तरीका जो आपने उपयोग किया है, में ऐसा हो सकता है कि उत्तर में 2 अंकों की संख्या आए।

5 **3172 ÷ 9** हल करें

$$\begin{array}{r|l} 9) & 3 \quad 1 \quad 7 \quad 2 \\ \hline & 3 \quad 4 \quad {}_{1}1 \text{ r } 13 \end{array} = \mathbf{352,\ शेष\ 4}$$

यहाँ आप देखें आपको 11 और 13 मिलाः
11 में पहिला 1 हांसिल के रूप में 4 में जुड़ने पर देता है 351,
और शेष में दूसरा 1 है इसलिये हमें मिला **352** और शेष **4**।

अभ्यास **D** निम्नलिखित को भाग दें:

a 9)6 1 5 3 **b** 9)3 2 8 2 **c** 9)5 5 5

d 9)8 2 5 2 **e** 9)6 6 1 **f** 9)4 7 4 1

g 9)1 2 3 4 5 **h** 9)4 7 4 7 **i** 9)2 0 0 8 2

a	**683 rem 6**	**b**	**364 rem 6**	**c**	**61 rem 6**
d	**916 rem 8**	**e**	**73 rem 4**	**f**	**526 rem 7**
g	**1371 r6**	**h**	**527 r4**	**i**	**2231 r3**

छोटा तरीका

हम दो अंकों को टाल सकते हैं। उपर दिये हुए उदाहरण 5 को इस प्रकार करें।

6 **3172 ÷ 9** हल करें

हम बड़ी संख्या जैसे 11 और 13 को टाल सकते हैं।
पिछले उदाहरण में हम ध्यान दें, 4 को नीचे रखने के पहले, कि अगले चरण 2 अंक देगा और इसलिए हम नीचे 4 के बजाय 5 रखते हैं:

$$\begin{array}{r|l} 9) & 3 \ 1 \ 7 \ 2 \\ \hline & \mathbf{3\ 5\ 2\ r\ 4} \end{array}$$

तब 5 को 7 में जोड़ने पर 12 हुआ लेकिन इसका एक हांसिल पहिले ही ले चुके हैं हम सिर्फ 2 नीचे रखें। अन्त में , 2+2 = 4.

7 **777 ÷ 9** हल करें

$$\begin{array}{r} 9\overline{)\,7\;\;7\;\;7\,} \\ \underline{\mathbf{8\;\;6\,r\,3}} \end{array}$$

अगर हम 7 को पहला अंक रखते हैं तो हम अगले चरण में 14 पाते हैं, इसलिये हम 8 रखते हैं।
8+7 = 15 और 1 हांसिल पहिले ही उपयोग कर लिया है।

अब, अगर हम 5 नीचे रखते हैं, हम देखते हैं कि 2 अंक अगले चरण में आते हैं, इसलिये हम 6 नीचे रखेंगे।

6+7 = 13 और 1 पहले ही उपयोग कर लिया है, इसलिए हम सिर्फ 3 नीचे रखते हैं।

अभ्यास E निम्नलिखित को 9 से भाग दें:

a 6153	**b** 3272	**c** 555	**d** 8252
e 661	**f** 4741	**g** 5747	**h** 2938
i 12345	**j** 75057	**k** 443322	**l** 1918161

a	**683 rem 6**	**b**	**363 rem 5**	**c 61 rem 6 g**	**d 916 rem 8 h**
e	**73 rem 4**	**f**	**526 rem 7**	**638 rem 5 k**	**326 rem 4 l**
i	**1371 rem 6**	**j**	**8339 rem 6**	**49258**	**213129**

15.2 8 से भाग देना

9 से भाग देने के सरल तरीके को 8, 7 आदि के लिये विस्तारित किया जा सकता है।

8 माना कि हम **31** को **8** से भाग देना चाहते हैं।

$$\begin{array}{r} \mathbf{8)\,\underline{3\;\;1}} \\ \underline{\mathbf{3\,r\,7}} \end{array}$$

हम पहिले **3** को उत्तर में नीचे लायें।
तब इस 3 को एक में जोड़ने के बजाय जैसा हम 9 से भाग देने में करते हैं, हम 3 को दुगना करके 1 में जोड़ते हैं जिससे **7** शेष के रूप में मिलता है हम 3 को **दुगना** करते हैं क्योंकि 8, दस से **2** कम है।

अभ्यास -F इन कुछ को कोशिश करें:

a 8) 2 2 **b** 8) 1 5 **c** 8) 2 5 **d** 8) 5 1

---

a 2 r6 b 1 r7 c 3 r1 d 6 r3

9 इसी तरह 211 को 8 से भाग के लिये:

8) 2 1 1
2 5 r 1 1 = 26 r 3

हम पहिले 2 को नीचे लायें,
इसको दुगना करें और अगले कॉलम के 1 में जोड़ कर 5 को नीचे रखें।
फिर 5 को दुगना करके अंतिम कॉलम के एक में जोड़ कर 11 को शेष के जैसा नीचे रखें।
चूकि इस शेष 11 में एक और 8 हैं, हम अपने उत्तर को **26 शेष 3** में बदलते हैं।

अभ्यास -G निम्नलिखित को कोशिश करें।

a 8) 1 1 1 **b** 8) 1 5 1 **c** 8) 1 0 0 **d** 8) 2 1 4 **e** 8) 1 1 2 1

---

a 13 r7 b 18 r7 c 12 r4 d 26 r6 e 140 r1

10 अब 7 से भाग देने के लिये जो कि 10 से 3 कम है, हमें प्रत्येक चरण के अंतिम उत्तर के अंक को तीन गुना करना चाहिये।

7) 1 1 और **7) 1 2 3**
1 r 4 **1 5 r18 = 17 r4**

अभ्यास -H इन्हें कोशिश करें:

a 7) 1 3 **b** 7) 3 1 **c** 7) 2 3 **d** 7) 4 0

e 7) 1 0 3 **f** 7) 1 1 1 **g** 7) 1 0 0

---

a 1 r6 b 4 r3 c 3 r2 d 5 r5
e 14 r5 f 15 r6 g 14 r2

15.3 99, 98... से भाग देना

11 मानो कि हम संख्या **121314 को 99 से भाग देना** चाहते हैं।

यह 9 से भाग देने की तरह है, लेकिन क्योंकि 99 में दो 9 हैं, हम उत्तर **एक साथ दो अंकों में** निकाल सकते हैं।

संख्या को जोड़ों में करने का सोचें: 12 / 13 / 14 जहाँ अंतिम जोड़ा शेष का भाग है।

तब 12 को उत्तर के प्रथम भाग की तरह लिखें।

99) 12 / 13 / 14
12

इसके बाद 12 को 13 में जोड़ें 25 को अगले भाग की तरह लिखें। अंत में 25 को अंतिम जोड़े (pair) में जोड़ें और 39 को शेष के तौर पर लिखें ।

99) 12 / 13 / 14
12 / 25

99) 12 / 13 / 14
12 / 25 / 39

इसलिये उत्तर **1225 और शेष 39** है।

अभ्यास -I 99 से भाग दें:

a 121416 **b** 213141 **c** 332211 **d** 282828 **e** 363432

f 11221122 (इसमें 4 जोड़े (pair)हैं, लेकिन तरीका वही है) **g** 3456 (इसमें 2 जोड़े हैं)

---

a 1226 r42 b 2152 r93 c 3355 r66 d 2856 r84 e (3670 r102) 3671 r3
f 113344 r66 g 34 r90

98 से भाग देना इसी तरह है ।

12 **121314 ÷ 98 = 1237 शेष 88.**

.
यह पहिले जैसा ही है, लेकिन 100, 98 से **2** कम है हम उत्तर के अंतिम भाग को **दुगना** करते हैं, (इसके पहिले कि उसे प्रश्न के दूसरे भाग में जोड़ें)।

इसलिय हम पहिले की तरह शुरू कर 12 को नीचे उत्तर में लिखें

98) 12 / 13 / 14
12

तब 12 को दुगना कर 13 में जोड़ें 37 पाने के लिये:

98) 12 / 13 / 14
12 / 37

अन्त में 37 को दुगना करें और इसे 14 मे जोड़ें:

98) 12 / 13 / 14
12 / 37 / 88 = 1237 शेष 88

अभ्यास -J 98 से भाग दें:

a 112203	**b** 102010	**c** 131313	**d** 200202	**e** 2131
a 1144 r91	**b 1040 r90**	**c 1339 r91**	**d 2042 r86**	**e 21 r 73**

इसी तरह हम संख्याऐं जैसे 97 और 999 से भी भाग दे सकते हैं।

15.4 भाजक आधार से कम

जैसा कि आपने देखा 9 से भाग देना सरल है।
इसी तरह दूसरे आधार (जैसे 100, 1000 आदि) के पास की संख्याओं से किसी भी संख्या को भाग देना सरल है।

13 माना कि हम 235 को 88 से भाग देना चाहते हैं। जो कि 100 के पास है।

हमें जानने की आवश्यकता है कि कितने 88 हम 235 से निकाल सकते हैं और इसके बाद शेष क्या है।
चूंकि प्रत्येक 100 में एक 88 है यहाँ 235 में साफ तौर पर दो 88 हैं। और शेष दो 12 (क्योंकि 100, 88 से 12 कम है) अतः 24 और 200 के आगे के 35 को जोड़ते हैं ।
इसलिये उत्तर है 2 शेष 59(24+35=59) ।
एक साफ तरीका भाग देने का इस प्रकार है

8 8) 2	**3**	**5**

हम दाय सें और दो अंकों को अलग करते हैं क्योंकि 88 पास है 100 के (जिसमें दो शून्य हैं)

तब चूंकि 88 बारह कम है 100 से, हम 12 को 88 के नीचे रखते हैं जैसा नीचे बताया है

8	**8) 2**	**3**	**5**
1	2	2	4
	2	**5**	**9**

हम पहिले अंकों 2 को उत्तर में नीचे लाते हैं।
इस 2 का तब ध्वज 12 में गुना करते हैं और 24 को 35 के नीचे रखते हैं जैसा उपर बताया है। हम तब अंतिम 2 कालम को जोड़ते हैं।

ध्यान दें कि 88 का 100 से अंतर सूत्र *''सभी 9 से ओर अंतिम 10 से''* (*All from 9 and the Last from 10)* से मिलता है।

यह भी ध्यान रखें कि **खड़ी रेखा की स्थिति हमेशा आधार संख्या में जितने शून्य हैं उससे निर्धारित होती है:** अगर आधार संख्या में 4 शून्य हैं तब खड़ी रेखा दायें से 4 अंक होगी और इसी तरह आगे के आधार के लिये भी।

यह आसानी से समझा जा सकता है कि जब पहिले 2 को उत्तर में नीचे रखते हैं, तब हम 235 में दो 88 की उम्मीद करते हैं । चूंकि प्रत्येक 100 में एक 88 है, 12 को छोड़ कर, दो 100 में दो 88 होगें और दो 12 शेष, जिसे 35 में जोड़ना चाहिये पूरा शेष 59 निकालने के लिये।

14 भाग दें – **31313** को **7887**. से

हम प्रश्न को पहले की तरह जमायें:

7887)	**3**	**1**	**3**	**1**	**3**

7887)	**3**	**1**	**3**	**1**	**3**
2 1 1 3		6	3	3	9
	3	**7**	**6**	**5**	**2**

सूत्र *''सभी 9 से और अंतिम 10 से''* (*All From 9 and the Last From 10)* लगाने पर 7887 से 2113 प्राप्त हुआ ।
3 को नीचे उत्तर में लायें (31313 का प्रथम अंक)
अब हम इस (3 को) ध्वज में गुणा करते हैं और 6339 को बीच की लाईन में रखें। तब अंतिम 4 कालम जोड़ने पर शेष 7652 मिलता है।

अभ्यास -K निम्नलिखित को भाग दें (जितने आप मानसिक स्तर पर कर सकते हैं करें):

a 88)1 2 1 **b** 76)2 1 1 **c** 83)1 3 2

d 98)3 3 3 **e** 887)1 2 2 3 **f** 867)1 5 1 3

g 779)2 2 2 2 **h** 765)3 0 0 1 **i** 8907)1 3 1 0 3

j 7999)1 2 3 2 1 **k** 7789)2 1 0 1 2 **l** 8888)4 4 3 4 4

---

a	**1/33**	**b**	**2/59**	**c**	**1/49**
d	**3/39**	**e**	**1/336**	**f**	**1/646**
g	**2/664**	**h**	**3/706**	**i**	**1/4196**
j	**1/4322**	**k**	**2/5434**	**l**	**4/8792**

दो अंक के उत्तर

यहाँ हम ऐसी स्थिति को देखते हैं जहाँ उत्तर में एक से अधिक अंक हों।

15 **1108 ÷ 79** = 13 शेष 81 = **14 शेष 2**.

हम दाहिने से दो अंक छोड़ते हुए नीचे दर्शाये तरीके से निशान लगायें क्योंकि यहाँ उत्तर दो अंकों में है:

79)	**1**	**1**	**0** |	**8**
			|	
			|	

79)	**1**	**1** |	**0**	**8**
2 1		2 |	1	
		|	6	3
	1	**3** |	**8**	**1**

पहिले 1 को नीचे उत्तर में लिखें।
ध्वज (Flag) 21 को 1 से गुणा करें उत्तर (21) को दूसरी पंक्ति में जैसा बताया है रखें।

दूसरे स्तंभ में जोड़ने पर 3 प्राप्त हुआ जिसे नीचे रखें तब 21 को 3 से गुणा करें 63 प्राप्त करने के लिये, जिसे हमने तीसरी पंक्ति में रखा, जैसा दिखाया है।

अंतिम दो स्तंभ को जोड़ें, लेकिन चूंकि शेष, 81, भाजक (79) से बड़ा है, वहाँ 81 में एक और 79 निहित है इसलिये वहाँ चौदह 79 है 1108 में शेष 2 के साथ।

16 **1121123 ÷ 8989** हल करें

8989)	**1**	**1**	**2** |	**1**	**1**	**2**	**3**
1 0 1 1		1	0 |	1	1		
			2 |	0	2	2	
			|	4	0	4	4
	1	**2**	**4** |	**6**	**4**	**8**	**7**

पहिला 1 उत्तर में नीचे आता है और ध्वज (Flagged) 1011 से गुणा करते हैं। इसे दूसरी पंक्ति में जैसा बताया है रखते हैं।

दूसरे स्तंभ को जोड़ कर हम 2 को नीचे उत्तर में रखें और तब इससे 1011 को गुणा करें 2022 को तीसरी पंक्ति में रखें।
तीसरे स्तंभ को जोड़ने पर 4 हुआ जिसे हम नीचे रखें और 1011 से गुणा भी करें। इसलिये हम 4044 को चौथी पंक्ति में रखते हैं और तब हम अंतिम स्तंभ को शेष प्राप्त करने के लिए जोड़ते हैं।

एक बार खड़ी लाईन खींच दी तो आप देख सकते हैं कि सवाल करने के लिये कितनी लाईन की आवश्यकता है, यह खड़ी लाईन के बांए, जितने अंक हैं के बराबर है (3 अंक और इसलिये 3 लाईन कार्य करने के लिये ऊपर उदाहरण 16 में)।

अभ्यास -L निम्नलिखित को भाग दें:

a 8 9)1 0 2 1 **b** 8 8) 1 1 2 2 **c** 7 9)1 0 0 1

d 8 8)2 1 1 1 **e** 9 7) 1 1 1 1 **f** 8 8 8) 1 0 0 1 1

g 8 8 7)1 1 2 4 3 **h** 8 9 9)2 1 2 1 2 **i** 9 8 8)3 0 1 2 5

j 8 8 9 9)2 0 1 0 2 0

---

a	**11/42**	**b**	**12/66**	**c**	**12/53**
d	**23/87**	**e**	**11/44**	**f**	**11/243**
g	**12/599**	**h**	**23/535**	**i**	**30/485**
j	**22/5242**				

एक सरलीकरण

इन उदाहरणों (और आगे के अध्याय में) में कार्य करने के तरीके से छुटकारा पा सकते हैं सूत्र *''सीधे (खड़े) और तिरछे''* (*Vertically and Crosswise*) का उपयोग करें।

उदाहरण 15 में हमारे पास 21 ध्वज और उत्तर का प्रथम 1 है:

2 1
1 -

पहले खड़े गुणा करने पर मिलता है 2×1=2 जिसे 1108 के दूसरे कालम में जोड़ने पर मिलता है 3 जो उत्तर का दूसरा अंक:

2 1
1 3

इसलिय अब हम तिरछे गुणा करते हैं और $2\times3 + 1\times1 = 7$ और इसको 1108 के शून्य में जोड़ते हैं जिससे 7 हुआ जो शेष का पहिला अंक है ।

2 1
1 3

अंत में दाय सें खड़े गुणा से मिलता है $1\times3=3$ जिसे 1108 के अंतिम अंक में जोड़ा जिससे 11 हुआ और पूरा शेष हुआ $7_11 = 81$.

इसी तरह बड़े सवाल उदाहरण 16 जैसे को किया जा सकता है।

15.5 भाजक आधार संख्या के ऊपर

एक बहुत इसी तरह का तरीका, लेकिन सूत्र *''पक्षान्तरण कर उपयोग करें''* (*Transpose and Apply*) के अंतर्गत, हमें किसी भी संख्या को ऐसी संख्या से भाग देने की अनुमति देता है जो आधार संख्या के निकट लेकिन आधार से ज्यादा है।

17 **1489 ÷ 123 = 12 शेष 13.**

यहाँ हम देखते हैं कि 123 आधार 100 के पास है इसलिये हम दायें से 2 अंक के बाद खड़ी लाईन खींचते हैं।
वास्तव में तरीका पहले जैसा ही है सिवाय इसके कि हम ध्वज संख्या को शिरोरेखा (Bar) संख्या में लिखते हैं:

$$\begin{array}{l rr|rr} 1\,2\,3\,) & 1 & 4 & 8 & 9 \\ \ \bar{2}\,\bar{3} & & \bar{2} & \bar{3} & \\ & & & \bar{4} & \bar{6} \\ & 1 & 2 & 1 & 3 \end{array}$$

पहिले 1 को नीचे उत्तर में लाएं।
इस 1 को ध्वज $\bar{2}\,\bar{3}$ से गुणा करें और नीचे लिखे $\bar{2}\,\bar{3}$ दूसरे कॉलम में जोड़ें और 2 को नीचे रखें।
इस 2 को $\bar{2}\,\bar{3}$ से गुणा करें और $\bar{4}\;\bar{6}$ रखें। तब अंतिम दो कालम को जोड़ें।

जैसा उपर बताया है सूत्र *''पक्षान्तरण कर उपयोग करें''* (*Transpose and Apply*) उपयोग किया है, क्योंकि हम वास्तव में 4, 8, 9 से घटा रहे हैं।

अभ्यास -M निम्नलिखित को भाग दें:

a 1 2 3)1 3 7 7	**b** 1 3 1)1 4 8 1	**c** 1 2 1)2 5 6
d 1 3 2)1 3 6 6	**e** 1 2 1 2)1 3 5 4 5	**f** 1 6 1)1 7 8 1
g 1 0 0 3)3 2 1 9 8 7	**h** 1 1 1)7 9 9 9 9	

---

a 11/24 b 11/40 c 2/14
d 10/46 e 11/213 f 11/10
g 321/24 h 720/79

दो दूसरी विसंगति, जहाँ उत्तर या शेष में ऋणात्मक संख्या आती है उन्हें आगे ध्यान देना है।

18 **10121 ÷ 113 = 89** शेष **64.**

$$
\begin{array}{rcc|cc}
\mathbf{1\,1\,3)\,1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\
\bar{1}\,\bar{3} \quad & \bar{1} & \bar{3} & & \\
 & & 1 & 3 & \\
 & & & 1 & 3 \\
\hline
\mathbf{1} & \mathbf{\bar{1}} & \mathbf{\bar{1}} & \mathbf{6} & \mathbf{4} = \mathbf{8964}
\end{array}
$$

हम जब दूसरे कालम पर आते हैं तो हम पाते हैं कि हमें $\bar{1}$ को नीचे उत्तर में लाना है, इसे ध्वज $\bar{1}\bar{3}$ से गुणा किया मतलब 13 हुए जिसको तीसरी लाईन में जोड़ें (दो ऋणात्मक चिन्हों के गुणा से एक धनात्मक चिन्ह बनता है)

उत्तर $1\bar{1}\bar{1}$ हमें अन्त में मिला यह वही है क्योंकि 100–11 जो कि 89 है।

19 **2211 ÷ 112** हल करें।

$$
\begin{array}{rc|cc}
\mathbf{1\,1\,2)\,2} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\
\bar{1}\,\bar{2} \quad & \bar{2} & \bar{4} & \\
 & & 0 & 0 \\
\hline
\mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{\bar{3}} & \mathbf{1}
\end{array}
= 20 \text{ शेष } \overline{29} \text{ या } \mathbf{19} \text{ शेष } \mathbf{83}
$$

भागफल 20, शेष – 29, मतलब कि 2211 है 29 कम 20 बार 112 से 29 कम है।
इसका मतलब यहाँ पर 2211 में 1122 केवल 19 बार आता है । इसलिये, हम जोड़ते हैं **112** को **–29** में जिससे भागफल 19 प्राप्त हुआ व शेष 83 बचा ।

अभ्यास -N निम्नलिखित को भाग दें:

a 1 1 2)1 2 3 4	**b** 1 2 1)3 9 9 3	**c** 1 0 3)4 3 2
d 1 0 1 2)2 1 3 1 2	**e** 1 2 2)3 3 3 3	**f** 1 2 3)2 5 8 4
g 1 1 3)1 3 6 9 6	**h** 1 2 1 2)1 3 7 9 8 7	**i** 1 1 1)7 9 9 9 9
j 1 2 1)2 6 5 2	**k** 1 2 3 1)3 3 0 3 3	

a	**11/02**	**b**	**33/00**	**c**	**4/20**
d	**21/060**	**e**	**27/39**	**f**	**21/01**
g	**121/23**	**h**	**113/1031**	**i**	**720/79**
j	**21/111**	**k**	**26/1027**		

"अब हम, आखिरकार, पुराने वायदे के अनुसार 'सीधे भाजन' नामक वैदिक विधि पर आ रहें हैं जिसमें उत्तर एक दृष्टिपात के साथ ही मिल जाता है। यह विधि उर्ध्वतिर्यक सूत्र का सरल और सहज अनुप्रयोग है तथा सभी प्रकरण में तत्काल ही लगती है। तथा जिसे हमने बार–बार विधियों की राजमणि कहा है वह सिर्फ इस कारण कि सार्विक अनुप्रयोग के अलावा दृष्टिपात के साथ मनुस्थ एक पंक्ति गणितीय संगणना विधि वाले वैदिक आदर्श का यह सर्वोत्तम तथा सर्वश्रेष्ठ प्रतिनिधित्व करती है।"

वैदिक गणित से, पेज नं. 217

अध्याय 16
मुकुट मणि

सारांश

16.1 ध्वज पर एक अंक– 2 अंकों की संख्या का एक लाईन में भाग
16.2 विभाजन विषयांतर– शेष जो चाहते हैं वह चुनना
16.3 बड़ी संख्याऐं– कितने भी अंक की संख्या को भाग देना
16.4 ऋणात्मक ध्वज अंक – कार्य का सरलीकरण करने के लिए शिरोरेखा संख्या का उपयोग
16.5 शेष को दशमलव में करना

16.1 ध्वज में एक अंक

विभाजित करने की सामान्य विधि, सीधा भाग भी कहलाती है, हमें कितने भी अंकों की संख्या को कितने भी अंकों की संख्या से एक लाईन में भाग देने की अनुमति देती है। श्री भारतीकृष्ण तीर्थजी, जिन्होंने वैदिक पद्वति की फिर से खोज की, इस तरीके को ''वैदिक गणित का मुकुटमणि'' कहा है।
यह सूत्र *''सीधे (खड़े) और तिरछे दोनो प्रकार से''* (*Vertically and Crosswise*) के अंतर्गत आता है।

1 माना कि हम 209 को 52 से भाग देना चाहते हैं।
हमें यह जानने की आवश्यकता है कि 209 में कितने 52 हैं।
पहले अंक को देखने पर हम पाते हैं कि 20 में 5 का भाग चार बार जायेगा हम 209 में चार 52 उम्मीद करते हैं।
हम 209 में चार 52 घटाते हैं यह देखने के लिये क्या बचा।
209 से चार 50 निकालने पर 9 बचा और हमें चार 2 भी निकलना आवश्यक है। यहाँ पर शेष 1 है।
हम प्रश्न को इस तरह जमाते हैं:

5^{2}	2	0	$_{0}9$
		4	1

भाजक 52 को लिखते वक्त 2 को *ध्वज* की तरह लिखते हैं और खड़ी लाईन दायें से एक अंक छोड़कर खींचते हैं, उत्तर 4 और शेष 1 को अलग करने के लिये ।

चरण (Step) हैं:
A. 20 में 5 का भाग देने पर भागफल **4** व शेष 0, जैसा बताया है।
B. उत्तर के अंक 4 को ध्वज 2 से गुणा करने पर मिला 8 और 09 से 8 को घटाने पर शेष **1**, जैसा बताया है।

2 321 में 63 का भाग दें।

हम प्रश्न को पहले की तरह लिखते हैं:

3	3	2	1
6			2
		5	6

= **5** शेष **6**

32 को 6 से भाग देने पर मिलता है 5 शेष 2, जैसा दिखाया है और उत्तर 5 को ध्वज 3 से गुणा करने पर मिला 15 जिसे 21 से घटाने पर शेष 6 बचा।

यहाँ हम क्या कर रहे हैं, पांच 60 को 321 से घटाया, जिससे 21 बचा और तब पांच 3 को 21 से घटाया। इसका मतलब है कि हमने पांच 63 को घटाया और 6 बचा।

निम्नलिखित प्रश्नों को उपर दर्शाये गये तरीके से जमायें।

अभ्यास -A निम्नलिखित को भाग दें:

a 103 ÷ 43 **b** 234 ÷ 54 **c** 74 ÷ 23 **d** 504 ÷ 72

e 444 ÷ 63 f 543 ÷ 82 g 567 ÷ 93

---

a 2r17 b 4r18 c 3r5 d 7r0
e 7r3 f 6r51 g 6r9

16.2 विभाजन विषयांतर (Digression) को छोटा करना

माना कि हम 10 को 3 से भाग देना चाहते हैं।
उत्तर साफ तौर पर 3 शेष 1 है 3) 1 0
3 rem 1

लेकिन दूसरे उत्तर भी संभव है: 3) 1 0 or 3) 1 0 or even 3) 1 0
2 rem 4 1 rem 7 4 rem $\bar{2}$

चूंकि ये सभी सही हैं हम इनमें से किसी एक को चुन सकते हैं जो विशेष सवाल के लिये अच्छा है।

अभ्यास -B प्रत्येक निम्नलिखित सवाल की नकल करें और प्रश्न चिन्ह को सही अंक से बदलें:

a 5) 2 1 — 3 शेष ? **b** 7) 5 1 — 6 rem ? **c** 4) 3 0 — 6 rem ? **d** 3) 2 2 — ? rem 4

e 5) 4 2 — 6 rem ? **f** 6) 3 9 — 4 rem ? **g** 5) 2 4 — 5 rem ? **h** 7) 2 6 — 4 rem ?

---

a 6 **b** 9 **c** 6 **d** 6
e 12 **f** 15 **g** $\bar{1}$ **h** $\bar{2}$

3 हल करें **503 ÷ 72.**

अगर हम पहिले की तरह आगे बढ़ते हैं:

$$\begin{array}{r|cc|l} 2 & 5 & 0 & {}_{1}3 \\ 7 & & & \\ \hline & & 7 & \end{array}$$

हम देखते हैं कि हमें 13 में से 14 घटाने पर उत्तर 7 शेष $\bar{1}$ मिलता है।

अगर ऋणात्मक संख्या हमें मंजूर नहीं है तो हम कह सकते हैं कि 50 को 7 से भाग देने पर ऊपर के सवाल में भागफल 7 शेष 1 नहीं है, लेकिन भागफल 6 शेष 8 है:

$$\begin{array}{r|cc|l} 2 & 5 & 0 & {}_{8}3 \\ 7 & & & \\ \hline & & 6 & 71 \end{array}$$

तब हम पाते हैं कि हमें 83 में से 12 घटाने पर धनात्मक शेष 71 प्राप्त हुआ।

उत्तर के अंक को 1 या 2 से कम करना कभी–कभी आवश्यक होता है अगर ऋणात्मक संख्या से बचना है। लेकिन यह ध्यान रखने योग्य बात है कि उत्तर का अंक एक से कम करते हैं तो शेष बढ़ जाता है भाजक (Divisor) के पहले अंक से । इसलिये उपर उत्तर 7 शेष 1 को 6 शेष 8 से बदल दिया हैः शेष 7 से बढ़ गया है, जो कि 72 का पहला अंक है।

उपरोक्त उदाहरण को पहले तरीके से आगे करने पर हमें मिलाः

$$\begin{array}{r|cc|l} 2 & 5 & 0 & {}_{1}3 \\ 7 & & & \\ \hline & & 7 & \bar{1} \end{array} = 6 \text{ शेष } 71.$$

उत्तर में हमें 7 मिला वह दर्शाता है सात बार 72, इसलिये हम उसमें से एक 72 को निकालते हैं (उसमें 6 बच जाते हैं) और उसे ऋणात्मक शेष में जोड़ते हैं $72 + \bar{1} = 71$ शेष पाने के लिये।

अभ्यास -C निम्नलिखित को भाग दें:

a 97 ÷ 28 **b** 184 ÷ 47 **c** 210 ÷ 53 **d** 373 ÷ 63 **e** 353 ÷ 52

f 333 ÷ 44 **g** 267 ÷ 37 **h** 357 ÷ 59 **i** 353 ÷ 59

---

a 3r13 **b 3r43** **c 3r51** **d 5r58** **e 6r41**
f 7r25 **g 7r8** **h 6r3** **i 5r58**

16.3 बड़ी संख्याऐं

17496 ÷ 72 = 243 शेष 0.
तरीका बिल्कुल पहिले जैसा है और क्रम में होता जाता है

हम प्रश्न को सामान्य तरीके से जमाते हैं:

2		1	7	4	9	6
7						

फिर 17 को 7 से भाग देते हैं और भागफल 2 शेष 3, नीचे रखते हैं, जैसा बताया:

2		1	7	4	9	6
7				3		
			2			

तिरछे अंक 2, 3, 4 पर ध्यान दें।
आगे हम उत्तर के अंक को ध्वज के अंक से गुणा करें:
2×2=4, इसे 34 से घटायें 30 प्राप्त करने के लिए और तब 7 से फिर भाग दें, 4 शेष 2 प्राप्त करने के लिये जैसा बताया है

2		1	7	4	9	6
7				3	2	
			2	4		

तब हम दोहराते हैं:अंतिम उत्तर के अंक को ध्वज से गुणा करते हैं जो 8 हुआ, इसे 29 से घटायें ।
21 प्राप्त करने के लिए तब 21 को 7 से भाग देने पर 3 शेष 0, जैसा बताया है

2		1	7	4	9	6
7				3	2	0
			2	4	3	0

अंत में हम फिर उत्तर के अंतिम अंक को ध्वज से गुणा करें 6 प्राप्त हुआ और इस 6 को 6 से घटायें शेष 0 पाने के लिए।

यह ध्यान देने योग्य महत्वपूर्ण बात है कि हम चक्र में आगे बढ़ते हैं जैसा चित्र में दिखाया है।

प्रत्येक चक्र पूरा होता है जैसे–जैसे कर्ण (digonal) नीचे जाता है ।

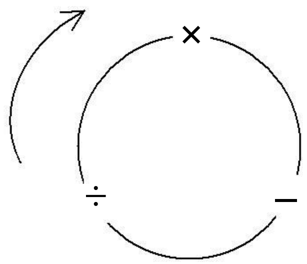
प्रत्येक चक्र मे होते हैं:

A. अंतिम उत्तर के अंक को ध्वज से गुणा करना,

B. इसे उपर दर्शाये दो तिरछे अंक से घटायें,

C. परिणाम को भाजक (Divisor)के प्रथम अंक से भाग दें और उतर व शेष को नीचे रखें.

यह है: (भाग), गुणा, घटाना, भाग;
गुणा, घटाना, भाग; . . .



5

50607 ÷ 123 = 411 शेष 54.

हालांकि भाजक में यहाँ तीन अंक हैं, 12 से भाग देना कोई समस्या नही है हम वही तरीका उपयोग कर सकते हैं:

3	5	0	6	0		7
12		$_2$	$_2$			$_5$
	4	1	1			54

अभ्यास -D निम्नलिखित भाग करें (शेष पहले 4 प्रश्न के लिये शून्य है इसलिए अगर सही है तो आप जान सकते हैं):

a 19902 ÷ 62	**b** 44749 ÷ 73	**c** 1936 ÷ 88	**d** 4032 ÷ 72
e 4154 ÷ 92	**f** 23824 ÷ 51	**g** 92054 ÷ 63	**h** 142857 ÷ 61
i 12233 ÷ 53	**j** 9018 ÷ 71	**k** 8910 ÷ 72	**l** 23658 ÷ 112
m 40000000 ÷ 61	**n** 14018 ÷ 64	**o** 4712 ÷ 45	**p** 22222 ÷ 76
q 651258 ÷ 82	**r** 301291 ÷ 56	**s** 511717 ÷ 73	**t** 360293 ÷ 46

a	**321**	**b**	**613**	**c**	**22**	**d**	**56**
e	**45r14**	**f**	**467r7**	**g**	**1461r11**	**h**	**2341r56**
i	**230r43**	**j**	**127r1**	**k**	**123r54**	**l**	**211r26**
m	**655737r43**	**n**	**219r2**	**o**	**104r32**	**p**	**292r30**
q	**7942r14**	**r**	**5380r11**	**s**	**7009r60**	**t**	**7832r21**

16.4 ऋणात्मक ध्वजांक (Flag Digits)

जब ध्वज संख्या बहुत बड़ी हो तो हमें अक्सर कई बार भागफल के अंक (जैसा पिछले प्रश्न 4 में 7 को 6 किया)कम करना पड़ता है, ऋणात्मक ध्वज का उपयोग कर, कई बार कम करने की प्रक्रिया से बचा जा सकता है।

6 **97 ÷ 28 = 3 शेष 13**.
अगर हम हमेंशा की तरह करें तो
हमें मिलता है:

$$\begin{array}{r|c|l} 8 & 9 & 7 \\ 2 & & {}_{3} \\ \hline & 3 & 13 \end{array}$$

हमें उत्तर के अंक को 4 से 3 करना है जिससे शेष काफी बड़ा हो।
ये कम करने की प्रक्रिया कई बार आती है जब ध्वज अंक बड़ा हो (यहाँ 8) इससे बचा जा सकता है 28 को $3\bar{2}$ की तरह लिख कर। –

$$\begin{array}{r|c|l} \bar{2} & 9 & 7 \\ 3 & & {}_{0} \\ \hline & 3 & 13 \end{array}$$

9 में 3 का भाग देने पर प्राप्त हुआ 3 व शेष 0
तब हम $\bar{2}$ को 3 से गुणा करते हैं, $\bar{6}$ हुआ और इसे 7 से घटाया.
लेकिन ऋणात्मक संख्या को घटाना मतलब जोड़ना, इसलिये हमें प्राप्त हुआ $7-\bar{6}=13$ शेष के लिए।

यह बहुत सरल है और इसका मतलब है कि:

जब भी हम शिरोरेखा (Bar Number) संख्या का उपयोग ध्वज में करते हैं हम गुणा को प्रत्येक चरण (Step)में जोड़ते हैं घटाने के बजाय।

अभ्यास -E निम्नलिखित को भाग दें, उत्तर के साथ में शेष लिखें:

a 373 ÷ 58 **b** 357 ÷ 48 **c** 300 ÷ 59 **d** 321 ÷ 47

e 505 ÷ 78 **f** 543 ÷ 68

---

a 6r25 b 7r21 c 5r5 d 6r39
e 6r37 f 7r67

उलट गुणन (MULTIPLICATION REVERSED)

सीधे भाग देने को ''खड़े और तिरछे गुणन तरीके'' को उल्टा कर प्रदर्शित किया जा सकता है।

उदाहरण के लिये 4032÷72 दिया है:

$$\begin{array}{r} p\;q \\ \underline{7\;2} \\ \underline{4\;0\;3\;2} \end{array}$$

हमें p और q का मान चाहिये जिससे संख्या pq को 72 से गुणा करने पर 4032 मिले। हम देखते हैं कि p का मान 5 होना चाहिये क्योंकि 4032 में जो 40 है उसके लिए p×7 उत्तरदायी है। और चूंकि 5×7=35 यहाँ 5 शेष है।

इसलिय अब हमारे पास है:

$$\begin{array}{r} 5\;\;q \\ \underline{7\;\;2} \\ \underline{4\;0\;{}_{5}3\;2} \end{array}$$

532 शेष रहता है, जो कि तिरछे गुणन व दायीं दिशा में खड़े गुणन के लिये जिम्मेदार है । तिरछे गुणा करने पर हम देखते हैं हमारे पास 5×2=10 और इसे 532 के 53 में से 10 घटाने पर 43 हुआ जो तिरछे गुणा करने के दूसरे भाग 7×q से आना चाहिए यह हमें बताता है कि q का मान 6 होना चाहिए और शेष 1.

$$\begin{array}{r} 5\;\;\;6 \\ \underline{7\;\;\;2} \\ \underline{4\;0\;{}_{5}3\;{}_{1}2} \end{array}$$

अब दायें से '12' पूरी तरह, खड़े गुणा करने के बराबर है, इसलिये शेष नहीं है
गुणा करने के उल्टे तरीके के समान सभी भाग किये जा सकते हैं और इस पाठ में बताये ''on the flag method'' तरीके को प्राप्त किया जा सकता है।

16.5 शेष को दशमलव में करना

हम भाग देने की प्रक्रिया को जब शेष तक पहुँच जायें, आगे बढ़ा सकते हैं जिससे उत्तर जितने दशमलव चाहिए प्राप्त कर सकें।

7 **40342 ÷ 73** पाँच दशमलव अंकों तक हल करें

$$\begin{array}{r|l} 3 & 4\,0\,3\,4\,2\,.\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \\ 7 & \qquad 5\;\,3\;\,5\;\,4\;\,1\;\;1\;\,3\;\,6\,2 \\ \hline & 5\,5\,2\,.\,6\,3\,0\,1\,3\,7 \end{array}$$

उत्तर को 5 सही दशमलव तक प्राप्त करने के लिये हमारे पास 6 अंक दशमलव के बाद होना चाहिये, अगर हमें क्रिया को खत्म करने की आवश्यकता है तो। अतः हम 40342 के बाद दशमलव बिंदु लगाकर 6 शून्य रखते हैं ।

उत्तर में दशमलव बिन्दु भाज्य के अंतिम अंक से एक अंक बायें तरफ आता है जहाँ से पहिले खड़ी लाईन गई थी।

हम हमेशा की तरह आगे बढ़ते हैं, ध्वज से गुणा करे, घटायें व 7 से भाग प्रत्येक क्रम के लिये।

इसलिए उत्तर **552.63014** पाँच दशमलव अंक तक।

8 **23.1 ÷ 83** को 3 दशमलव अंक तक निकाले।

उत्तर साफ तौर पर 1 से कम है क्योंकि 23 कम है 83 से।

$$\begin{array}{r|l} 3 & 2\,3\,.\,1\,0\,0\,0 \\ 8 & \qquad 7\;\,9\;\,5\;\,2 \\ \hline & 0\,.\,2\,7\,8\,3 \end{array}$$

पहिले की तरह दशमलव बिन्दू उत्तर के बायें एक अंक छोड़कर, जो कि **0.278** है।

अभ्यास -F 2 दशमलव अंक तक निकालें:

a 108 ÷ 31 **b** 4050 ÷ 73 **c** 9876 ÷ 94 **d** 25.52 ÷ 38

e 78 ÷ 49 **f** 6.7 ÷ 88 **g** 19 ÷ 62 **h** 62 ÷ 19

a	**3.48**	**b**	**55.48**	**c**	**105.06**	**d**	**0.67**
e	**1.59**	**f**	**0.08**	**g**	**0.31**	**h**	**3.26**

इस सीधे भाग देने को आगे पुस्तिका 2 में विकसित किया गया है। (या देखें संदर्भ 1, 3, 5).

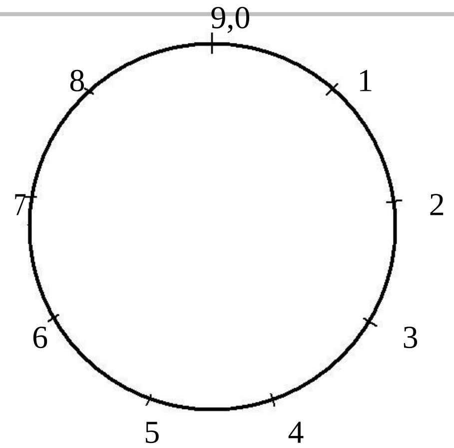
वैदिक गणित सूत्र

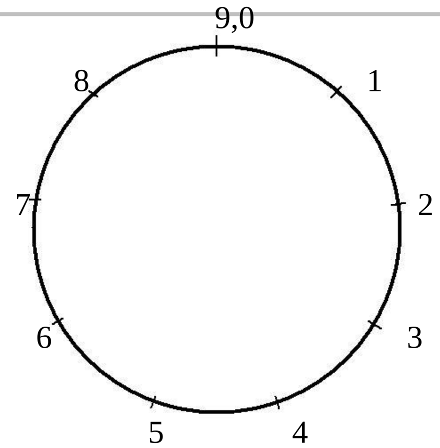
1	एकाधिकेन पूर्वेन Ekādhikena Pūrvena	पहले से एक अधिक के द्वारा
2	निखिलं नवतश्चरमं दशतः Nikhilam Navatascaramam Dasatah	सभी नौ में से व अंतिम 10 में से
3	उर्ध्वतिर्यग्भ्यामं Ūrdhva Tiryagbhyām	सीधे (खड़े) और तिरछे दोनों प्रकार से
4	परावर्त्य योजयेत् Parāvartya Yojayet	पक्षान्तरण कर उपयोग करें
5	शून्यं सामयसमुच्चये Sunyam Sāmyasamuccaya	समुच्चय समान होने पर शून्य होता है।
6	आनुरूप्ये शून्यं अन्यत् (Anurupya) Sūnyamanyat	अनुरूपता होने पर दूसरा शून्य होता है।
7	संकलन व्यवकलनाभ्यां Sankalana vyavakalanābhyām	जोड़कर और घटाकर
8	पूरणापूरणाभ्यां Pūranāpuranābhyām	अपूर्ण को पूर्ण करना
9	चलनकलनाभ्याम् Calana Kalanābhyām	चलन–कलन के द्वारा
10	यावदूनं Yāvadūnam	जितना कम है अर्थात विचलन
11	व्यष्टिसमष्टिः Vyastisamastih	एक को पूर्ण और पूर्ण को एक मानकर
12	शेषाण्यडेन चरमेण Sesanayankena Caramena	अंतिम अंक से अवशेष को
13	सोपान्त्यद्वयमन्त्यं Sopāntyadvayamantyam	अन्तिम और उप अन्तिम का दोगुना
14	एकन्यूनेन पूर्वेन Ekanūnena Pūrvena	पहले से एक कम के द्वारा
15	गुणितसमुच्चयः Gunitsamuccayah	गुणितों का समुच्चय
16	गुणकसमुच्चयः Gunakasamuccayah	गुणकों का समुच्चय

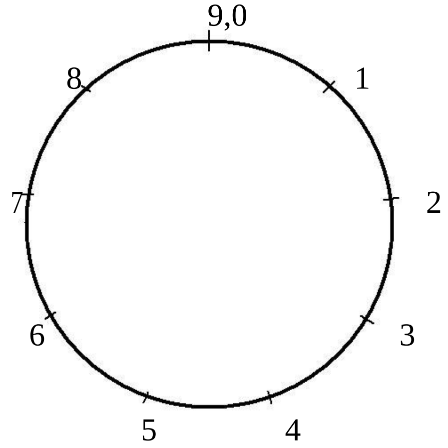
उप–सूत्र

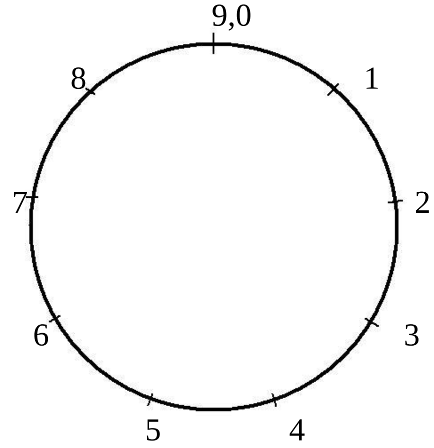
1	आनुरूप्येण Anurupyena	अनुरूपता द्वारा
2	शिष्यते शेषसंज्ञः Sisyate Sesamjn̄ah	बचे हुए को शेष कहते हैं
3	आधमाधेनान्त्यमन्त्येन Ādyamādyenāntyamantyena	पहले को पहले से अंतिम को अंतिम से
4	केवलैः सप्तकं गुणयात् Kevalaih Saptakam gunyāt	'क', 'व', 'ल' से 7 का गुणा करें
5	वेष्टनम् Vestanam	विभाजनीयता परीक्षण की विशिष्ट क्रिया का नाम
6	यावदूनं तावदूनं Yāvadūnam Tāvadūnam	जितना कम उतना और कम
7	यावदूनं तावदूनीकृत्य वर्गं च योजयेत् Yāvadūnam Tāvadūnīkrtya Vargan̄ca Yojayet	जितना कम उतना और कम करके वर्ग की योजना भी करें
8	अन्त्ययोर्दशकेऽपि Antyayordaske'pi	अंतिम अंकों का योग दस
9	अन्त्ययोरेव Antyayoreva	केवल अंतिम द्वारा
10	समुच्चयगुणितः Samuccayagunitah	सर्व गुणन
11	लोपनस्थापनाभ्यां Lopanasthāpanābhyām	विलोपन एवं स्थापना द्वारा
12	विलोकनं Vilokanam	अवलोकन द्वारा
13	गुणितसमुच्चयः समुच्चयगुणितः Gunitsamuccayah Samuccayagunitah	गुणकों के समूहों का गुणनफल और गुणनफल के गुणांकों का योग समान होगा।
14	ध्वजांक Dhavajānka	घात के स्थान का अंक

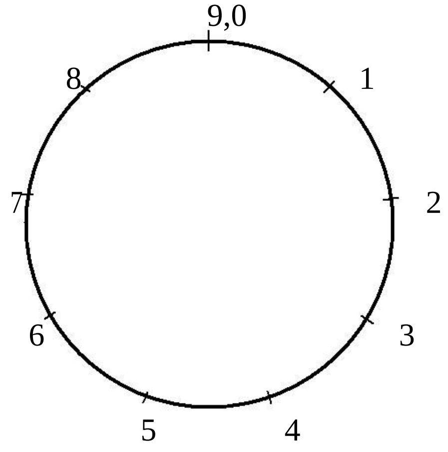
9 बिन्दू वृत्त

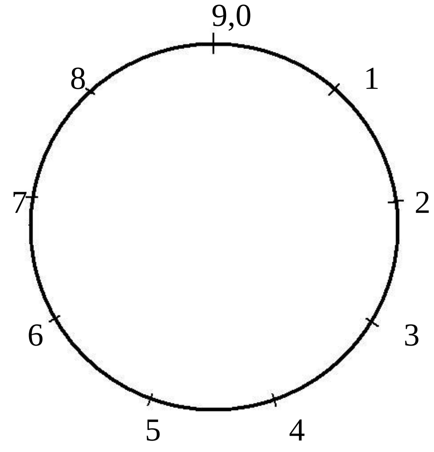

9,0
1
2
3
4
5
6
7
8


9,0
1
2
3
4
5
6
7
8


9,0
1
2
3
4
5
6
7
8


9,0
1
2
3
4
5
6
7
8


9,0
1
2
3
4
5
6
7
8


9,0
1
2
3
4
5
6
7
8

संदर्भ

1. श्री भारती कृष्ण तीर्थ जी, ''वैदिक गणित'', मोतीलाल बनारसीदास द्वारा प्रकाशित, 1965. ISBN 81-208-0163-6.
2. "सेलीब्रेटिंग परफेक्सन इन एज्यूकेशन", महर्षि युनिवर्सीटी प्रेस 1997. ISBN 81-7523-013-4.
3. Williams K. R. "डिसकवर वैदिक मेथेमेटिक्स". वैदिक मेथेमेटिक्स रिसर्च ग्रुप, 1984. ISBN 1-869932-01-3.
4. Williams K. R. and M. Gaskell "दि कॉस्मिक केल्कूलेटर". मोतीलाल बनारसीदास, 2002. ISBN 81-208-1871-7.
5. Nicholas A. P., K. Williams, J. Pickles. वरटीकली ं एण्ड क्रोसवाईज. प्रोत्साहनात्मक किताबें, 1984. ISBN 1-902517-03-2.
6. श्री भारती कृष्ण तीर्थ जी , "वैदिक मेटाफिजिक्स", मोतीलाल बनारसीदास द्वारा प्रकाशित, 1978. ISBN 0-89581-472-2.

वैदिक सूत्रों की अनुक्रमणिका (सूची)

सूत्र

पहले से एक अधिक के द्वारा 3, 97, 109, 118

सभी नौ में से परन्तु अंतिम दस में से 48-, 70, 77, 87, 90, 97, 147, 149

सीधे (खड़े) और तिरछे दोनों प्रकार से 60, 66, 72, 106-, 121, 135-, 152-

पक्षांतरण कर उपयोग करें 130-, 150

समुच्चय समान होने पर शून्य होता है 28

जब एक अनुपात में होता है तो दूसरा शून्य होता है

जोड़कर और घटाकर 11,82

अपूर्ण को पूर्ण करके (4)

चलन–कलन के द्वारा

जितना कम है अर्थात् विचलन 5, 75

एक को पूर्ण और पूर्ण को एक मानकर 99

शेष को अंतिम अंक से

अंतिम और उप अंतिम का दोगुना 22, 81, 82

पहिले से एक कम के द्वारा 51, 52, 97

गुणितों का समुच्चय :32

गुणकों का समुच्चय
सभी गुणक

वैदिक उप–सूत्रों की अनुक्रमणिका

उप–सूत्र

अनुरूपता के द्वारा 14, 71, 73, 96, 99, 102

बचे हुए को शेष कहते हैं

पहले को पहले से अंतिम को अंतिम से 79-, 98, 126

'क', 'व', 'ल' से 7 का गुणा करें

विभाजनियता परीक्षण की एक विशेष क्रिया का नाम

जितना कम उतना और कम

जितना कम उतना और कम करके वर्ग की योजना भी करें 75

अंतिम अंकों का योग दस 98

केवल अंतिम द्वारा

सर्व गुणन

विलोपन एवं स्थापना द्वारा 54

अवलोकन द्वारा 102

गुणकों के समूहों का गुणनफल और गुणनफल के गुणांकों का योग समान होगा 32

घात के स्थान का अंक 41, 46, 77

अनुक्रमणिका

जोड़ 4-, 54
बायें से दायें 40
अंकों को 24
बीजगणितीय गुणा 112
बीजगणितीय वर्ग 124
शिरोरेखा संख्या 85
लाभ 88
आधार गुणन 59
आधार संख्यायें 49
नौ के अंक को बाहर निकालना 26
गणना की जांच 79
पूर्ण 4
मुकूटमणि 152
कमी 5, 65
अंक 24
अंक जोड़ 24
जांच 31, 78, 84, 114
वर्ग की 125
पहेली 29
विभाजनीयता 81
भाग
5 आदि से 21
8 आदि से 143
99 आदि से 145
नौ से 139
जांच 78
संख्यायें आधार से थोड़ी उपर 150
संख्यायें आधार से थोड़ी नीचे 146
सामान्य 152
संख्या विभाजन 57
दोगुना व आधा 14-, 43
डुप्लेक्स 121, 128
समीकरण 130
पहाड़े आगे बढ़ाना 19
भिन्न 134
तुलना 137
आधा करना 17
बायें से दायें गणनाएं
जोड़ 40
लाभ 47
घटाना 44
गुणन 42
गुणक खिसकाना 109
गुणक
द्विपद 112
4 आदि से 16
5 आदि से 20
11 से 92
9 से 94
सभी नौ से....... 59
पहला पहले से 98
देख कर 101
एक अधिक से 96
औसत के उपयोग से 99
खड़े व तिरछे से 59-, 105
जांच 33
सामान्य 105
बायें से दायें 42
गुणक खिसकाकर 109
आधार के पास 59
विभिन्न आधार के पास 74
अस्थाई आधार के पास 71
संख्या विभाजन 56
विपरीत करना 158
बायें से दायें 116
वर्ग करना 119
पहाड़े 19, 59
मानसिक जोड़ना 6
मानसिक अंकगणित 41, 69
मुद्रा 53
गुणक खिसकाकर 109
गुणक 4
नौ बिंदु वृत्त 26
संख्या विभाजन
जोड़ 54
भाग 18, 57
गुणन 56
वर्ग करना 123
घटाना 55
प्रतिशत 102
आवृति दशमलव 64
संख्याओं को दोहराना 101
रशियन पिज़ेन्ट गुणन 69
विशेष भाग 139
विशेष गुणन 92
विशेष संख्याऐं 101
पूर्ण वर्ग का वर्गमूल 126
वर्ग निकालना 119
बीजगणितीय 124
सामान्य विधि 121
संख्यायें आधार संख्या के निकट 75
50 के पास की संख्यायें 120
संख्यायें जिनके अंत में पांच 119
सीधा भाग 105
घटाना 12, 55
सभी 9 से 49-, 88
जांच 45
आधार से 49
बायें से दायें 44
दस बिन्दु वृत्त 3
वैदिक वर्ग 34

वैदिक गणित की और किताबें

शिक्षक मार्गदर्शिका (मध्यवर्ती)

यह प्रारंभिक किताब की तरह है लेकिन इसका क्षेत्र विशाल और विस्तृत है (5 से 10 तक की कक्षा के शिक्षक के उद्देश्य से)। इसके अन्तर्गत divisibility, square roots, applications of triples, further equations, combined operations आदि क्रियाएं निहित हैं. ISBN 978-1-902517-17-9

अग्रवर्ती शिक्षक मार्गदर्शिका (Advance)

इसके अन्तर्गत : calculus, series, logs and exponentials, trigonometry (including solving trig equations, proving identities), solution of equations (special types, quadratics, cubics, transcendental), complex numbers, coordinate geometry, transformation geometry, Simple Harmonic Motion, projectile motion, forces, work moments, आदि आते हैं। ISBN 978-1-902517-18-6

कॉस्मिक कम्प्यूटर (संक्षिप्त संस्करण)

यह आगे वर्णित पाठ्यक्रम का छोटा संस्करण है इसमें कहीं–कहीं बहुत विचित्र वैदिक विधियाँ हैं। यह एक सुंदर सचित्र पूरे रंगीन पृष्ठों के साथ, पूर्ण जिल्द की हुई पुस्तक है। वैदिक गणित का विस्तृत परिचय इसमें मिलता है लेखक: Kenneth Williams and Mark Gaskell. 216 pages. Almost A4 in size. 1997. ISBN 978-0-9531782-0-9

कॉस्मिक कम्प्यूटर पाठ्यक्रम

यह इंग्लेण्ड व वेल्स के राष्ट्रीय पाठ्यक्रम के तीन महत्वपूर्ण चरण (11–14 की उम्र) को शामिल करती है। इसमें तीन पाठ्यपुस्तकें, एक शिक्षक मार्गदशिका व एक उत्तर पुस्तिका है। किताब 1 में अधिकतर सामग्री 8 वर्ष के बच्चों के लिये उपयुक्त है यहाँ से इसे पेथोगोरस थ्योरम, द्विघाती समीकरण जैसे विषय के लिये किताब 3 में विकसित किया गया है। शिक्षक मार्गदर्शिका में प्रत्येक किताब का सारांश सम्मिलित है, साथ ही एक एकीकृत क्षेत्र चार्ट (गणित के सभी विषय और यह दिखाते हुए कि प्रत्येक भाग एक दूसरे से कैसे जुड़े हैं), सैकड़ों मानसिक परीक्षण (ये पिछले कार्य को दोहराते हैं, नये विचारों को उत्पन्न करते हैं और आगे के पाठ्यक्रम से पूरी तरह सहबद्ध हैं) तेज विद्यार्थियों के कक्षा कार्य के लिए अतिरिक्त शीट (16 प्रत्येक किताब में) संशोधन परीक्षण, खेल, कार्य पत्र आदि हैं।

डिसकवर वैदिक गणित (MATHEMATICS)

इसमें 16 अध्याय हैं, प्रत्येक अध्याय वैदिक सूत्र या उप–सूत्र पर केन्द्रित है और उनके, कई प्रयोग दर्शाता है। यह कुछ विस्तार, विविधता, स्पष्टीकरण, प्रमाण के साथ हैं। इसमें GCSE और 'A' level की परीक्षा के प्रश्नों के हल भी हैं। लेखक: K. Williams, 216 pages. 1984.

ट्रिपल्स

यह किताब Pythagorean Triples (जैसे 3,4,5) के प्रयोग को दर्शाती है। ट्रिपल संयोजन (combining triples) की सरल व सुन्दर व्यवस्था से, गणित के व्यापक क्षेत्र के प्रश्नों को हल करने की अप्रत्याशित व प्रभावकारी सामान्य विधि मिलती है, जिसमें परम्परागत विधि से बहुत कम श्रम लगता है। आसान पाठ इस विधि को पूर्ण रूप से समझाता है, जिसका प्रयोग trigonometry (आपको कोई भी जटिल सूत्रों की आवश्यकता नहीं), coordinate geometry, simple harmonic motion, astronomy आदि में होता है। लेखक: K. Williams, 176 pages, paperback.

वर्टिकली एण्ड क्रॉसवाइज

एक सूत्र पर 16 अध्याय की यह एक अग्रवर्ती (Advanced) किताब साधारण गुणा करने से लेकर नॉन–लिनियर पारशियल डिफरेंशियल इक्वेशन तक को हल करने के लिए है। इसका सम्बन्ध है (i) calculation of common functions and their series expansions, (ii) the solution of equations, starting with simultaneous equations and moving on to algebraic, transcendental and differential equations. लेखक : A. P. Nicholas, K. Williams, J. Pickles, 200 pages, paperback, 1999.

नेच्यूरल केल्कुलेटर

यह किताब मानसिक गणित पर केंद्रित है और इसके गुणों की रूप रेखा का विस्तृत परिचय देती है। इसमें 9 अध्याय हैं मुख्यतः गुणन लेकिन जोड़, घटाना भाग भी शामिल हैं। लेखक: K. Williams, 100 pages, paperback. ISBN 978-1-902517-15-5

विस्तृत जानकारी व दूसरी किताबों के लिये कृपया देखें: **http://www.vedicmaths.org**